Bélgica

I

LA ORGANIZACIÓN DE LA ENSEÑANZA SECUNDARIA [1]

Las bases de la actual enseñanza secundaria belga fueron establecidas por la ley orgánica de 1.º Junio 1850. Esa ley restableció la influencia preponderante del Estado en el dominio de la instrucción secundaria. Desde esa fecha las instituciones oficiales de enseñanza secundaria se clasifican en dos categorías o grados: las escuelas medias superiores o de primer grado, que toman el nombre de *Ateneos reales;* y las Escuelas medias inferiores o de 2.º grado denominadas *Escuelas medias del Estado,* en las cuales se refundieron las Escuelas primarias superiores y las Escuelas de Comercio.

La dualidad de la orientación de los estudios que se ha establecido gradualmente en los colegios de las principales ciudades, bajo la influencia de causas muy complejas, la consagra el artículo 21 de la ley, que dice: « Dará cada Ateneo dos enseñanzas: la enseñanza de las humanidades, y la enseñanza profesional ». Según los programas, expresados en líneas generales por la misma ley orgánica, estableciendo una comparación con las escuelas secundarias alemanas, podemos decir que el *Ateneo real* belga es una justaposición muy feliz, con una penetración parcial de los cursos, de un *Gimnasio* y de una *Escuela real.* Cambiando ciertas clases, los alumnos que lo deseen pueden seguir los cursos análogos a los de un *Gimnasio real.*

En resumen los cursos del *Ateneo* están distribuidos de tal manera que los alumnos que se dirigen a los estudios

(1) Informe sobre la enseñanza de las matemáticas en las Escuelas medias, Ateneos y Colegios, por H. Ploumen, Inspector de Enseñanza Secundaria.

universitarios pueden recibir una preparación conveniente; y que los alumnos que se destinan a la industria, al comercio, a las artes, a los estudios politécnicos o a la carrera militar, pueden igualmente seguir todas las lecciones útiles a su futura especialización.

. . . .

De 1850 a 1881 se mantiene el mismo régimen legal para la enseñanza secundaria; pero, poco a poco, se introdujeron algunos cambios en la distribución de las materias en las diferentes clases, y en sus horarios particulares. La circular de Octubre 1857 establece una modificación en la repartición de las teorías matemáticas, en los siguientes términos:

« La experiencia ha demostrado que un gran número « de alumnos humanistas llegan a retórica sin haber apro- « vechado suficientemente el curso de matemáticas... « Este estado de cosas puede ser atribuido a la necesidad « de dar en 3.ª y en 2.ª [1] una enseñanza demasiado « rápida a fin de recorrer completamente el programa. « El tiempo faltaba para interrogar a los alumnos y ejer- « citarlos en aplicaciones bastante numerosas. Actualmente « el programa alivia notablemente la 3.ª y la 2.ª y puede « esperarse que su aplicación inteligente hará participar « a la generalidad de los alumnos en las ventajas de la « instrucción científica ».

. . . .

A partir del año escolar 1888-89, un decreto de 31 de Agosto de 1887 transforma radicalmente el plan de estudios de los ateneos y de las escuelas medias: con pequeñas modificaciones este plan de estudios es el que rige actualmente para los ateneos. Desde esa fecha las clases de los ateneos están agrupadas en tres secciones principales: 1.ª las *humanidades greco-latinas* para los jóvenes que se destinan a los estudios superiores de filosofía, filología, derecho, ciencias naturales; 2.ª las *humanidades*

(1) 5.° y 6.° años.

latinas, en las que el griego está reemplazado por una enseñanza muy ampliada de las matemáticas; 3.ª las *humanidades modernas,* sin griego ni latín, con enseñanza desarrollada de las lenguas modernas y de las ciencias. Cada sección principal comprende siete clases o años de estudio. La edad de ingreso en la clase inferior, o 7.ª, es de 11 años.

Las humanidades modernas se bifurcan a partir del 5.º año, en *sección científica* y en *sección industrial* y *comercial:* la sección científica prepara para los estudios superiores físicos y matemáticos, para la Escuela militar, para las escuelas especiales universitarias; la sección industrial y comercial prepara para las grandes administraciones públicas, para el Instituto comercial superior, para los empleos superiores del comercio, etc.

Las Escuelas medias fueron reorganizadas por el decreto de 10 de Septiembre de 1897. Se trató de hacer desaparecer ciertas lagunas observadas, y de acentuar las tendencias de la instrucción hacia una cultura bien adaptada a las carreras del trabajo, es decir, a las artes y oficios, a las profesiones industriales o agrícolas, al comercio, etc.; la edad de ingreso es de 12 años. La escuela media comprende tres clases o años de estudio; pero después de la 1.ª clase pueden los alumnos optar a algunas materias de especialización que varían según las localidades. Desde 1897 fué factible anexar al tipo antiguo y uniforme de *escuela media de instrucción general,* sea una *sección comercial,* sea una *sección industrial,* sea una *sección agrícola.*

. . . .

II

TIEMPO CONSAGRADO A LAS MATEMÁTICAS Y A SUS DIVERSAS APLICACIONES

Como las aplicaciones están comprendidas en los programas, y, en cierto modo, de ellos son inseparables, no

es posible indicar el tiempo asignado a la teoría y el que se dedica a la práctica o a las aplicaciones: éstas requieren con frecuencia, principalmente para la agrimensura y ejercicios de medida sobre el terreno, horas suplementarias, fuera del horario que figura más adelante. En otros términos, esos ejercicios son objeto de excursiones que se justaponen a los ejercicios de la clase, más teóricos o preparatorios, del curso propiamente dicho.

Ateneos reales

SECCIONES	1.er año	2.º año	3.er año	4.º año	5.º año	6.º año	7.º año	TOTAL HORAS SEMANALES
Humanidades antiguas								
A) Greco-latinas . . .	3	3	3	3	3	3	3	21
B) Latinas	3	3	4	4	6	6	8	34
Humanidades modernas								
A) Sección científica. .	3	3	4	4	6	6	8	34
B) » comercial .	3	3	4	4	3	3	2	22

Escuelas medias del Estado

CLASE DE ESTUDIOS	1.er año	2.º año	3.er año	TOTAL
A) Escuela media de instrucción general	4	4	5	13
B) Sección comercial . . .	4	4	3 + 2 (1)	11º13
C) » indusrrial . . .	4	4	5	13
D) » agricola . . .	4	4	5 + 1 (2)	13º14

(1) 2 horas de aritmética comercial durante el 1.er semestre.
(2) 1 hora de geometría aplicada a la agricultura.

III

OBJETO DE LA ENSEÑANZA MATEMÁTICA EN LAS DIFERENTES SECCIONES DE LOS ATENEOS Y EN LAS ESCUELAS MEDIAS.

La instrucción que dan las escuelas medias forma, después de la reglamentación del año 1897, un todo completo y suficiente en sí mismo, sin conexión directa, sea con los ateneos y colegios, sea con las universidades. La aritmética, el álgebra y la geometría, sólo se desarrollan, en cuanto a sus teorías, para permitir el empleo razonado e inteligente a las necesidades de la vida usual, de las artes y oficios, del comercio, de la industria y de las carreras administrativas: ordinariamente es alcanzado este objeto limitado, principalmente, donde las secciones especiales se han anexado a las clases de la instrucción general. Los jóvenes que, después de haber terminado sus clases en la escuela media, desean continuar sus estudios (para prepararse para las escuelas técnicas de la Universidad, por ejemplo) deben ingresar en el ateneo, en la sección de humanidades modernas. Un decreto ministerial de 1895 estipula que esos alumnos pueden inscribirse en 4.º año; sin embargo algunos se someten con éxito al examen de admisión del 5.º año científico o del 5.º comercial.

De las cuatro secciones de los ateneos, dos tienen en vista especialmente la cultura matemática que es necesaria para seguir los cursos de ingeniería civil, puentes y calzadas, minas, etc., o los cursos universitarios de la Facultad de ciencias físicas y matemáticas; son las secciones *científica* y *latina*, cuyos programas matemáticos son iguales, siendo comunes los cursos de matemáticas a contar del 3.er año de estudios.

. . . .

En la sección comercial, las materias sólo comprenden

las teorías indispensables para la enseñanza razonada de las operaciones financieras y de los cálculos que con ella se relacionan. Los alumnós que terminan sus estudios en esta sección pueden, por su trabajo personal, llegar a ser buenos actuarios. Sin embargo, un pequeño número de estos alumnos tiene en vista situaciones de la alta banca, de las finanzas o de las instituciones de previsión y de seguros. Cierto número continúa sus estudios en el Instituto Comercial de Amberes o en la Escuela de Ciencias Comerciales anexas a las Universidades. Cuando un candidato posee un certificado de estudios de la sección comercial de un ateneo, no se le exige examen de ingreso en esas escuelas superiores de comercio. Un gran número de jóvenes siguen los cursos de los ateneos para ulteriormente poder ingresar en una de las grandes administraciones públicas, como correos, telégrafos, ferrocarriles, registros fundiarios, contribuciones, etc. Ninguna sección está especialmente organizada para dar la preparación teórica, literaria y científica en perfecta concordancia con las exigencias de esos importantes exámenes; sin embargo, la sección comercial les ofrece una enseñanza que, aproximadamente, contiene todos los elementos útiles para esa preparación. Es por esto que muchos alumnos de esta sección estudian con el fin de prepararse para el examen exigido para esos servicios, que, más bien que examen, es un concurso serio, puesto que, a veces, el número de candidatos es veinte veces mayor que el de los empleos disponibles.

La sección greco-latina tiene por objeto principal dar una cultura y una instrucción general preparatoria para los cursos universitarios de las facultades de Derecho, de Medicina y de ciencias naturales. Las matemáticas figuran en el plan de esta sección, principalmente por su influencia sobre el desarrollo del raciocinio; pero se profundizan lo suficiente para los alumnos, que han asimilado bien esas materias, no encuentren dificultades en seguir con provecho los cursos de física y de química,

tales como esas ciencias se enseñan a los futuros médicos o doctores en ciencias naturales.

La extensión del plan de estudio de los ateneos, principalmente por la agregación de los elementos del cálculo diferencial e integral, permitirán dar mayor desarrollo a los cursos científicos de la enseñanza superior.

IV

LOS MÉTODOS DE ENSEÑANZA, MATERIAL DIDÁCTICO, TEXTOS, TRABAJOS PRÁCTICOS, ETC.

Los mismos métodos generales o de enseñanza varían sensiblemente, en la práctica, según la personalidad o las preferencias de los profesores que los aplican. Difícil sería, sino fastidioso, entrar en detalles respecto del método que cada uno adopta; sin embargo, la cuestión de los métodos ordinariamente seguidos, en los ateneos y escuelas medias, para la enseñanza de las matemáticas, es muy importante; es, por otra parte, una cuestión de que depende principalmente la naturaleza y la extensión de los resultados obtenidos en la instrucción en todos los grados y para todas las materias de la enseñanza. Así es que sobre ella se han hecho mediar recomendaciones o notas oficiales insertas a continuación de los programas Resumiremos esas notas, que tienden todas a preconizar una marcha lenta e intuitiva, que divida las dificultades teóricas, que acuerde una atención continua a las consideraciones concretas para establecer los principios y para evitar las transiciones. Imponen también aplicaciones simples que permitan, al principio, un contralor y una fácil verificación, referencias numerosas a las nociones ya adquiridas en las diversas ramas de las matemáticas, en una palabra, recomiendan un llamado constante al buen sentido y a la razon, más bien que un vano aprendizaje de memoria, sea verbal, sea mecánico o técnico.

Ciertamente, la facilidad y aún la habilidad en el manejo del algoritmo son preciosas y deben fijar por este motivo la atención de los profesores y de los alumnos; pero, en nuestras escuelas, sólo deben llegar después de una comprensión neta y completa de las teorías, de las que en cierto modo son el coronamiento. Del mismo modo, la facultad de abstracción no puede ser postulada desde el principio; esta facultad se desarrollará tanto más seguramente y más sólidamente cuanto sus bases concretas sean más claras y en mayor número. Lo abstracto será pues una generalización progresiva de lo concreto y, al menor desfallecimiento, para retemplar sus fuerzas, debe dirigirse a lo real o a lo tangible. ¡Qué sea realmente éste el alcance de las notas agregadas a los programas!

En 1.º y 2.º años, la definición de la multiplicación debe ser generalizada sucesivamente a medida que lo exijan las teorías. En las mismas clases, el sentido y las reglas de las operaciones sobre las fracciones ordinarias deben explicarse al principio por medio de problemas concretos.

En 5.º año de la Sección greco-latina, el cálculo algebraico propiamente dicho es precedido de la resolución de numerosos problemas, numéricos al principio, generales después. Algunas fórmulas se establecen y se aplican a ejemplos númericos; se interpretan los valores negativos, indeterminados o infinitos. Es después de esta importante introducción concreta que se coloca el cálculo algebraico, cuyo sentido se hace evidente, lo mismo que su utilidad y su carácter de generalización de la aritmética.

Para la enseñanza de la geometría plana y de la agrimensura, las figuras claras, no sobrecargadas de notaciones ni de líneas accesorias, deben aliviar el esfuerzo intelectual de los principiantes; para la agrimensura y la medida de terrenos, se recomienda hacer dibujos cuidadosos con la regla y el compás.

La geometría de tres dimensiones conduce gradualmente al alumno a representarse claramente los cuerpos sólidos con todos sus elementos, y en sus relaciones los unos

con los otros. Los sólidos representados por sus aristas, de alambre, de cartulina o por reducciones de madera, son de uso casi general, a lo menos para establecer intuitivamente los teoremas fundamentales; pues rápidamente satisfacen buenas figuras en perspectiva; después para la generalización y las aplicaciones teóricas debe tenderse al empleo de representaciones esquemáticas o de simples esfuerzos de imaginación espacial.

En trigonometría, las definiciones y las fórmulas fundamentales se establecen partiendo de consideraciones concretas, y las aplicaciones se relacionan a combinaciones geométricas. La marcha de la enseñanza se hace más lenta, del punto de vista simple del cálculo abstracto; pero, en cambio, se encuentra, de camino, múltiples ocasiones para ejercitar sin cesar las diversas facultades de los alumnos y de hacer la enseñanza interesante para todos.

Las notas sobre los métodos recomendados son muy explícitas en lo que se refiere a los programas de las escuelas medias. Esas notas tienen en cuenta también que la instrucción en esos establecimientos debe ser más práctica, de utilidad más inmediata.

Para la aritmética, dicen las instrucciones: « Las operaciones y los problemas de aplicación se razonarán: « el profesor escogerá demostraciones simples, pero rigurosas; evitará cuidadosamente reemplazar por simples « verificaciones las verdaderas demostraciones que deben « resultar de las definiciones y de los principios.

« El profesor adoptará la vía de la inducción para conducir los alumnos a que comprendan las definiciones, « los principios y las reglas, y para que por sí mismos « los descubran, cuando el asunto no ofrezca demasiada « dificultad. Procederá, pues, al principio por medio de « ejemplos, y pasará de lo concreto, de lo particular, a « lo abstracto y a lo general.

« Los ejercicios de cálculo mental, los problemas y otras « cuestiones de aplicación, marcharán constantemente a

« la par con la enseñanza teórica. El profesor dará la ma-
« yor importancia a las aplicaciones prácticas; nunca per-
« derá de vista que, si el curso de aritmética debe ser una
« verdadera gimnasia de las facultades de juicio y de razo-
« namiento, importa también que prepare, de una manera
« eficaz, a los alumnos para aplicar el cálculo a los nu-
« merosos casos de la vida, es decir, a las necesidades
« de las artes y oficios del comercio, de la industria, de
« agricultura, etc.

« El profesor propondrá frecuentemente problemas en
« los cuales intervengan, además de datos que necesiten
« el empleo de *cálculo escrito*, otros datos que conduzcan
« a ejercicios de *cálculo mental*, que presenten combina-
« ciones ingeniosas y felices simplificaciones basadas sobre
« *principios* de aritmética.

« Los datos de los problemas serán tomados en los lími-
« tes de la realidad y suministrarán a los alumnos nocio-
« nes prácticas de gran utilidad. Sin embargo, los proble-
« mas cuya solución exigiría largas explicaciones científi-
« cas o técnicas no entran en el cuadro de los estudios
« de la escuela media.

« Buen número de los problemas de aritmética que se
« propongan a las señoritas se referirán a hechos usuales
« de la vida, sobre cuestiones de economía doméstica, sobre
« los resultados del ahorro. Cuando el estudio de la arit-
« mética es bien llevado, contribuye a introducir en los
« hogares ese espíritu que regula los gastos en relación con
« los ingresos, que inspira la previsión y hace fructificar e
« producto del ahorro ».

Las instruciones que acompañan al programa de geometría de las escuelas medias señalan las mismas tendencias:

« La parte teórica del curso comprende las proposiciones de las que se hace frecuentes aplicaciones en la vida práctica, y aquellas que sirven de base a las primeras: están descartadas las cuestiones teóricas puras. No se trata, sin embargo, de proceder, como en la escuela primaria,

por vía intuitiva ó experimental pura; las proposiciones serán demostradas rigurosamente y sólidamente encadenadas ».

Se proponen frecuentemente a los alumnos, como aplicaciones, teoremas para demostrar, problemas generales para resolver, lugares geométricos para encontrar. « Sin prohibir en absoluto esta clase de cuestiones, que « aguzan el espíritu de observación y hacen nacer el gusto « de los estudios teóricos, el profesor escogerá sobre todo, « ejercicios de aplicación a la vida usual, a las artes y « oficios, a la medida de las superficies y de los volúme- « nes, a los trabajos industriales, a la agrimensura, etc. « Los problemas numéricos, las construcciones gráficas « (regla y compás) suministrarán las aplicaciones más « numerosas.

« Es asociando íntimamente la teoría a la práctica, es « esforzándose en hacer ésta lo más fecunda posible, que « el profesor llegará a hacer del curso de geometría un « poderoso medio de educación intelectual y una prepa- « ración eficaz para un gran número de profesiones.

« El profesor tendrá cuidado de no emplear exclusiva- « mente la forma *expositiva*. Se esforzará, por interroga- « ciones lógicamente conducidas, en asociar ampliamente « los alumnos a su enseñanza. El conocimiento práctico « de las formas geométricas adquirido en los cursos pri- « marios les ayudará a comprender el alcance de las « cuestiones que trate el profesor; y cuando hayan ad- « quirido el hábito de la reflexión, con frecuencia les « ocurrirá el género de demostración que deben aplicar, « deducir del teorema nuevamente estudiado los corola- « rios que de él resultan, mostrar como él se liga a las « proposiciones precedentemente demostradas ».

Agreguemos que, en todos los establecimientos de instrucción media, el dibujo figura como materia obligatoria en el plan de estudios (salvo para algunas de las clases superiores de la sección greco-latina y de la sección comercial). Los alumnos adquieren, pues, rápidamente

las aptitudes necesarias para .ejecutar trabajos gráficos serios en relación con las lecciones de matemáticas. Corrientemente se hacen dibujos para la agrimensura, la medida y la división de los terrenos, así como para el curso de geometría descriptiva. La limpieza del trazado, la claridad de las notaciones son tenidas en cuenta, así como la exactitud de las construcciones, cuando se trata de corregir esos dibujos. Las exigencias son igualmente rigurosas para los dibujos geométricos, en el concurso general de las clases científicas de los ateneos.

Para dar a conocer el espíritu con que se da la enseñanza, existen muy útiles informaciones en los textos recomendados; el examen de estos textos puede, además, ser indispensable para determinar la extensión real de las teorías y de las aplicaciones, cuya indicación sólo puede figurar sumariamente en los programas.

Los textos destinados a los alumnos de las escuelas medias habían llegado a ser, antes de la reforma de 1897, voluminosos tratados: una circular ministeral del mismo año, hace notar con razon que los textos de proporciones exageradas son el flagelo de las escuelas. Los profesores que los emplean en su curso se ven obligados a precipitar su marcha, a emplear casi continuamente la forma expositiva, a renunciar a las interrogaciones propias del método inductivo; descuidan así poner en actividad las facultades del espiritu. El alumno escucha pasivamente la lección y se contenta de aprender de memoria, de una manera mecánica, lo que encuentra en su texto. Para obviar a tales inconvenientes es que los programas (principalmente de las escuelas medias) han sido revisados, precisados, y detallados; que el carácter de las aplicaciones a hacerse en la escuela ha sido bien determinado.

Ningún libro puede ser empleado en las clases de los ateneos y de las escuelas medias, si previamente no ha sido aprobado por el Gobierno, previo informe del Consejo de Perfeccionamiento de la enseñanza secundaria: toda obra clásica autorizada debe, después de un plazo de cuatro años, ser sometida nuevamente al Consejo.

La adopción de una edición no se extiende a las ediciones subsiguientes: por lo tanto el autor debe someter a un nuevo examen cada nueva edición del libro cuyo empleo ha sido autorizado. Fuera de los textos propiamente dichos, destinados a facilitar la tarea de los alumnos, el Consejo de Perfeccionamiento señala también a la atención de los profesores cierto número de libros que considera de útil consulta, sea del punto de vista del método que sigue, sea del punto de vista de las aplicaciones; otras obras son recomendadas para las bibliotecas donde pueden ser consultadas por los profesores y los alumnos. En fin, el Gobierno hace también publicar una lista de las obras entre las cuales se eligen las destinadas a premios.

Los cursos dictados están proscriptos; pues, sin hablar de sus inconvenientes pedagógicos, ofrecerían un medio demasiado fácil y demasiado tentador para sustraerse a las prescripciones rigurosas relativas a la adopción previa de los textos clásicos.

V

CONCENTRACIÓN DE LA ENSEÑANZA

Fuera de las lecciones consagradas exclusivamente a las matemáticas y a sus aplicaciones teóricas, los alumnos tienen ocasión de utilizar sus conocimientos de aritmética y de álgebra en los cursos de ciencias comerciales. La física y la química ofrecen también numerosas cuestiones en las que el álgebra y la geometría desempeñan rol importante en el desarrollo racional de las soluciones.

Para las clases especiales de la sección comercial, el álgebra financiera y la geometría están a cargo del profesor de matemáticas. La aritmética comercial es enseñada por el profesor de ciencias comerciales: este curso

comprende, entre otras materias, para el 5.º año, «el cálculo del interés y del descuento por los métodos más prácticos, las cuentas corrientes, las aligaciones y mezclas, las conversiones de monedas y pesos». En el 6.º año, las materias de oro y de plata, el comercio de los metales preciosos, los cambios, los fondos públicos, sobre todo, numerosas aplicaciones sobre las operaciones al contado. En fin, en la clase superior, las operaciones de bolsa en general, los arbitrajes en materia de oro y plata, en cambios y fondos públicos, operaciones a plazo fijo, préstamos diversos, operaciones con prima, sean directas, sean inversas, sean dobles, operaciones diversas, arbitrages de mercaderías, etc.

Los alumnos encuentran, pues, amplia materia para ejercitarse en el género especial de cálculos de uso corriente en la práctica de los negocios, y se dan cuenta de la gran utilidad de los conocimientos abstractos de matemáticas para obtener una suficiente seguridad en los resultados concretos.

El curso de física, que sólo comienza en 5.º año de las humanidades modernas y en 6.º de las humanidades greco-latinas, suministraría una fuente inagotable de aplicaciones de la mayor importancia para afirmar el sentido matemático. Sin embargo, el escaso número de horas asignado a ese curso (2 a 3 por semana) y la considerable extensión de las materias de estudio no permite detenerse, lo que sería necesario, en las aplicaciones del cálculo. En general, una hora por semana está reservada a los desarrollos matemáticos elementales y a los cálculos numéricos con empleo de fórmulas en las clases de la sección científica. Para las otras clases, el tiempo falta y hay que limitarse a algunos problemas numéricos en los cuales las fórmulas de la física, establecidas experimentalmente en las lecciones, constituyen todo el fundamento de la solución pedida.

Por otra parte, la preparación matemática de los alumnos no sería suficiente para abordar de frente, y de una

manera realmente científica, la gran mayoría de las teorías físicas relativas a la luz, al calor, al magnetismo, a la electricidad, etc. Después, no podemos perder de vista que la física enseñada en el ateneo sólo comprende las nociones elementales, establecidas en lo posible, experimentalmente.

Lo mismo ocurre en química: las reacciones explicadas teóricamente, y según las experiencias del curso, sólo dan lugar a cálculos numéricos muy simples, pero cuyos resultados verificables de inmediato, no dejan de tener una feliz influencia para hacer comprender las nociones enseñadas.

He extractado lo más esencial de uno de los dos informes que el inspector Ploumen presentó a la Comisión Internacional de enseñanza de las matemáticas: he suprimido los capítulos referentes a los programas, a los exámenes y a la formación del profesorado: aquéllos, porque aun se mantienen en la corriente clásica, y por lo tanto no son utilizables para el estudio de la reforma de la enseñanza; y los últimos porque se refieren a temas que trataré especialmente más adelante.

LAS TENDENCIAS ACTUALES DE LA ENSEÑANZA MATEMÁTICA EN BÉLGICA Y SU INFLUENCIA SOBRE LOS MÉTODOS Y PROGRAMAS POR H. PLOUMEN, INSPECTOR DE ENSEÑANZA SECUNDARIA.

Cuando se organizó la instrucción secundaria, de 1850 a 1860, los poderes públicos, asistidos por el Consejo de perfeccionamiento, dieron al curso de matemáticas toda la amplitud de que parecía susceptible entonces. Retoques múltiples, pero de secundaria importancia, reforzaron después la enseñanza de la sección profesional (llamada ahora sección de humanidades modernas). Sin embargo,

después de la reorganización de 1888, que se limitó a un grupo nuevo de los cursos existentes, una situación estable parece haberse alcanzado, principalmente en lo que concierne a los programas. La única modificación de cierto alcance que puede señalarse, después de 1888, es la orientación más práctica de los cursos de aritmética y de álgebra financiera en las humanidades modernas, sección industrial y comercial.

Ahora, en el trascurso de los últimos 25 años, la enseñanza de las matemáticas ha recibido, en América y en varios países importantes de Europa, una extensión que la ha renovado en sus bases y en sus métodos.

Ha resultado de esto, que Bélgica, que tenía, hace medio siglo, programas matemáticos notables para la época, ha perdido desde hace tiempo su superioridad relativa. Esta comprobación, por otra parte, puede hacerse para muchas otras materias, y no hay duda de que la enseñanza media belga mucho podría ganar con una completa reorganización. Por esto es que el gobierno ha constituído recientemente una comisión que se ocupa de estudiar las reformas que deben hacerse en la enseñanza secundaria. Las discusiones y los trabajos de esta comisión han tenido, hasta ahora, por objetos principales la reorganización de la educación física y la cuestión tan espinosa del rol respectivo de las lenguas antiguas y de las lenguas modernas; pero las ciencias exactas tienen en esa comisión representantes activos y competentes que, sin ninguna duda, tomarán con interés la tarea de extender y perfeccionar los programas y los métodos en cuanto lo exijan las necesidades de la época y los progresos de la metodología matemática. Sin prejuzgar las decisiones y sin esperar las realizaciones prácticas de las mismas, por sanciones legales, nos parece útil para responder á los votos de los promotores del 4.º Congreso internacional de matemáticas, examinar las tendencias presentes de la enseñanza matemática en Bélgica y su influencia probable sobre los métodos y los programas de mañana.

Trataremos de determinar lo que, en el dominio casi ilimitado de nuestra ciencia, posee en el más alto grado la virtud de realizar el fin principal de la enseñanza media, es decir la cultura general del espíritu, suministrando al mismo tiempo el conjunto de conocimientos matemáticos concretos indispensables como base científica de los estudios superiores, en las diversas facultades universitarias.

. . . .

De todas las ramas matemáticas, la primera y más importante es la aritmética; ella es la base de las otras, y su conocimiento práctico es indispensable, por la multitud de sus aplicaciones usuales.

El joven alumno que empieza sus estudios secundarios posee ya, además del manejo de los números enteros y de las fracciones decimales, la idea de número abstracto, independiente de la sustancia y de la forma de los objetos concretos. Esta ciencia rudimentaria parece suministrar un buen punto de partida para el conocimiento más profundo de la aritmética teórica, y para una cultura más general del espíritu. Desgraciadamente, los alumnos de las dos clases inferiores (1.º y 2.º años) no tienen la inteligencia suficientemente preparada para gustar inmediatamente la belleza de las demostraciones, perfectas pero sutiles. Además, no se dan bien cuenta de la necesidad de demostrar el fundamento de procedimientos, de los cuales, desde muchos años atrás, saben servirse mecánicamente; las reglas de las operaciones fundamentales, y sus propiedades más útiles, les parecen postulados generales que se identifican con la idea misma de número. Es así que las primeras demostraciones arriesgan de parecerles supérfluas y fastidiosas. Es preciso, de parte del profesor, mucha paciencia y una gran seguridad de método, para prevenir, y mejor todavía para extirpar, la tendencia general de la mayor parte de los principiantes de recitar de memoria las definiciones y las demostraciones. Se requiere una atención y esfuerzos ince-

santes para hacerles decir los puntos principales, los lazos esenciales del razonamiento, para habituarlos a dejarse guiar sólo por los principios y así aproximarse gradualmente al fin o a la tésis.

La influencia educativa de la aritmética y de toda otra rama de las matemáticas, se encuentra así disminuída, en cierto modo, en esas primeras clases; sería más segura y más decisiva sobre las inteligencias, mejor preparadas, de los alumnos de las clases superiores.

Habría ventaja para los principiantes, en que las teorías de la aritmética fueran reducidas a lo que tienen de esencial en las propiedades de los números y la divisibilidad; y en que sólo se considerara como indispensable las nociones necesarias para el pasaje al álgebra teórica.

Durante los dos primeros años, el cálculo mental, lo mismo que el escrito, sería el punto de apoyo de la enseñanza matemática y aun de la científica en general. No el cálculo casi mecánico, o tomado como fin de sí mismo, sino el cálculo que se justifique como medio de llegar a la solución de las cuestiones concretas. Basándose sobre algunas experiencias simples y alentando a los alumnos a que hagan otras, recurriendo a veces a la simple observación de objetos bien elegidos, el profesor fácilmente encontrará el medio de interesar a sus alumnos, de hacerles conocer cantidad de datos preciosos para la vida ordinaria. Insensiblemente conducirá a los jóvenes a que generalicen resultados aislados, después a deducir ideas abstractas. La agrimensura, las artes, los oficios, la industria, el comercio, la física, la química, la mecánica, la tecnología, etc., son minas inagotables de problemas numéricos que excitan la curiosidad, nutren la memoria y hacen comprender el sentido de las teorías por las cosas a las cuales se aplican.

Para estimular el espíritu de libre investigación y de iniciativa personal, deberá mezclarse a esas cuestiones concretas, problemas más complejos y de interés más

especulativo, que exigen una atención y un análisis más delicado y más penetrante. Aquí los métodos deben ser encontrados casi en cada caso particular; así, su influencia sobre el conjunto de la clase será a veces mínima, y para que los alumnos más adelantados no se interesen sólo en buscar las soluciones, será necesario dosificar y graduar hábilmente la dificultad. En las clases más elevadas, esas cuestiones se sustituyen por problemas de aritmología; la comparación de las soluciones diversas de un mismo ejercicio hará surgir naturalmente la noción de elegancia matemática.

El vasto campo que abraza la aritmética hace de ésta una especie de ciencia-tipo: bajo su forma elemental, ella es indispensable al comerciante, al obrero, al ingeniero; se muestra así el útil que la inteligencia presta a toda actividad económica. Bajo su forma superior ella ha permanecido, a causa de la precisión y de la sencillez de sus principios, la rama de las ciencias exactas en la cual las demostraciones alcanzan mayor rigor. Ella reina soberana en las cuestiones árduas del análisis matemático superior (teoría de las funciones elípticas, funciones abelianas, etc.), tiende a identificarse con las cuestiones a cada nueva impulsión progresiva. Una instrucción aritmética profunda, se manifiesta, pues, eminentemente útil a todos, y la virtud educativa que ella posee en tan alto grado resulta, de que los números forman una especie de armadura fundamental del pensamiento científico.

De este edificio grandioso, sólo la parte más elemental es utilizable para la sección de humanidades antiguas. Para la sección científica, se le agrega la teoría de los números primos, la de las funciones periódicas, la extracción de las raíces cuadradas y cúbicas.

El álgebra y la geometría, son las ramas de las matemáticas cuyos elementos deben ser enseñados en las clases medias y superiores; desde la 5.ª o la 6.ª de las dos secciones (2.º o 3.er año), esas ramas podrían figurar en el programa, bajo la reserva y en las condiciones que

serán examinadas a propósito de los procedimientos de iniciación.

Los símbolos sintéticos del álgebra simplifican mucho la solución de los problemas. Sólo el poner en ecuación los problemas es lo que exige esfuerzos intelectuales serios y enseña a condensar las ideas, hechos abstractos bajo una forma neta y precisa. La resolución de la ecuación, desenvolviéndose según reglas invariables, salvo algunos casos particulares, corresponde a un trabajo más uniforme y sólo exige una atención sostenida. La transformación de la fórmula general, encontrada como solución de un problema de datos literales, puede dar lugar a la investigación de nuevos enunciados, consecutivos al del problema dado. Es este un excelente ejercicio de lenguaje. En fin, la discusión de un problema literal parece una excelente preparación para la interpretación de las fórmulas que se encuentran en las ciencias diversas; después, la costumbre de encarar todos los casos posibles, y de examinar sus consecuencias, da una amplitud de vista que con frecuencia tiene un valor enorme en la vida.

Aún la parte un poco mecánica del álgebra puede ser considerada como favorable a la cultura general; pues la necesidad de calcular pronto y bien incita el espíritu al orden y a la pronta decisión.

La influencia del álgebra en la educación intelectual y en la formación del carácter no son, pues, de desdeñar; es evidente que la manera como serán presentadas y comprendidas las cuestiones algebraicas, será decisiva al principio, en cuanto a la mayor o menor influencia que esa ciencia ejercerá sobre el espíritu y la voluntad. Un trabajo incompleto y mecánico, sin alcance, pues, será con frecuencia la consecuencia de lecciones fundamentales mal aprendidas, por haber sido mal presentadas. Por esta razón, el profesor nunca habrá variado demasiado los primeros ejercicios del álgebra a los principiantes, ni tampoco habrá insistido demasiado sobre el valor y la

significación exacta de las letras y de las otras abreviaciones simbólicas, Es aquí, sobre todo, donde marchar despacio, es marchar con seguridad. La resolución de problemas numéricos familiarizará desde luego con el empleo de las letras, después la investigación de las fórmulas generales relativas a los intereses simples y al descuento, mostrará la necesidad de las generalizaciones de los cálculos literales y la importancia del signo de que una letra está afectada.

El cálculo algebraico aplicado a polinomios simples y a fracciones cuyos términos son a lo más trinomios, la interpretación de las soluciones de algunos problemas de datos literales (1.er grado con una incógnita) y la resolución de los sistemas numéricos con dos o tres incógnitas, suministrarán la materia de dos años de estudios o de tres, según que el álgebra se haya empezado en 3.o o en 4.o año de las dos secciones.

La ecuación de segundo grado, el estudio del trinomio $\underline{a}\, x^2 + \underline{b}\, x + \underline{c}$ a la cual se relacionará la síntesis de las nociones de función, ya dadas ocasionalmente, las progresiones, los logaritmos, en fin las aplicaciones prácticas a a cuestiones diversas, como las anualidades, los seguros de vida, los problemas de aplicación a la geometría plana y sólida, formarán el coronamiento de los estudios algebraicos generales en la sección de humanidades antiguas.

La tercera rama de las matemáticas, que forma necesariamente el objeto de la enseñanza en los ateneos, es la geometría. El encadenamiento lógico de las proposiciones y la perfección de las demostraciones hieren la inteligencia de los menos dotados, por que, a pesar del carácter abstracto de las nociones elementales de la geometría, el espíritu encuentra un punto de apoyo en las figuras, en las que se marcan por el pensamiento las diversas etapas del razonamiento. Se ha repetido tan a menudo que la geometría es un curso de lógica aplicada, que es inútil insistir sobre este punto. De hecho, sin embargo, las formas del razonamiento lógico no son por lo general dedu-

cidas con suficiente claridad por el profesor en el estudio de los diversos teoremas, ni en los estudios de conjunto sobre los grupos de teoremas.

Enseñada de un modo conveniente, la geometría estimula la atención, la reflexión, el juicio; da al adolescente a certeza y la solidez del espíritu. Las aplicaciones numéricas, relativas a las medidas de las superficies y de los volúmenes, entran en el dominio de la aritmética; pero, las aplicaciones teóricas y, sobre todo, los problemas de construcción, figuran entre los ejercicios que más completamente desarrollan la iniciativa personal y el espíritu de investigación; los métodos particulares son numerosos, pero será preferible hacer emplear con la mayor frecuencia posible el método tan fecundo de los lugares geométricos. La discusión y la construcción, con la regla y el compás, de los resultados obtenidos aguzan el sentido crítico, habitúan al orden y a la precisión. La geometría puede ser enseñada desde el 3.er año de estudios, o sea en la quinta clase de las humanidades antiguas o modernas, con los cuidados y restricciones de que se hablará al tratar de los ejercicios de iniciación. Los ocho libros de Legendre pueden repartirse en las cinco clases superiores de modo que los principios geométricos, útiles en los cursos de ciencias o en las aplicaciones algebraicas, sean estudiados en tiempo oportuno. Los ejercicios de agrimensura y de nivelación son necesarios, para dar una idea de los instrumentos más complicados que se emplean en topografía y en astronomía. A esos ejercicios se agregarán útilmente las nociones elementales de la trigonometría rectilínea, reducida a la resolución del triángulo rectángulo.

En resumen, las partes de las matemáticas que tienen más directa influencia sobre el desarrollo del espíritu, y que al mismo tiempo suministran las ideas abstractas y los conocimientos matemáticos concretos que todo hombre cultivado debe haber asimilado, son: aritmética elemental, álgebra en los límites indicados, y la geometría con la trigonometría rectilínea.

Si ahora tenemos en cuenta lo que facilitará los estudios superiores y la cultura matemática necesaria para mantenerse al corriente de los progresos de las ciencias, seremos conducidos a ensanchar notablemente ese programa fundamental. A partir de la Universidad los estudios se especializan para responder a las exigencias de las diversas carreras liberales. Distinguiremos, en cuanto a las matemáticas que les son más útiles, tres categorías de carreras, según que los estudios superiores, correspondientes son: *a) Derecho; b) Ciencias naturales* (zoología, botánica, mineralogía, química); *c) Matemáticas* (para los ingenieros de minas, puentes y calzadas, etc., y para los doctores en ciencias físicas y matemáticas).

A fin de determinar las teorías que es urgente agregar a las ramas matemáticas, que ante todo tienen en vista la cultura general del espíritu, investigaremos la naturaleza de las cuestiones de orden matemático que un abogado, un naturalista o un médico, etc., tienen con frecuencia que resolver, que discutir, o por lo menos comprender, en el ejercicio de sus funciones.

a) Doctor en derecho. — Los modernos jurisconsultos, abogados o magistrados, deben tener serios conocimientos sobre la teoría de las rentas, seguros y empréstitos.

Sin pretender que sus conocimientos prácticos deban igualar a los de un actuario, estimamos que un jurisconsulto debe saber establecer o verificar las fórmulas esenciales y corrientes relativas a las rentas, a los seguros y a los empréstitos. Nociones algo extensas del cálculo de probabilidades *a priori* son deseables, y, por consiguiente, la teoría elemental de las combinaciones debe ser estudiada en el ateneo. El manejo de las tablas de Pereire debe serles fácil, así como el cálculo práctico por logaritmos.

b) Doctores en ciencias naturales y doctores en medicina. — Los progresos continuos de las ciencias físicas (física propiamente dicha y físico-química) han favorecido una marcada elevación en la enseñanza superior de esas ra-

mas. Sin hablar de la electricidad, que acaba su conquista del mundo, señalaremos la creciente importancia dada a los principios de la mecánica (conservación de la energía) el estudio más profundo de los movimientos periódicos, ligado a la óptica física, el desarrollo que han tomado las representaciones gráficas de las presiones, de las variaciones de la temperatura, de los estados de equilibrio variables, etc. Por otra parte la físico-química reclama cada vez más un sitio considerable en los cursos generales de química, y el andamiento matemático de esta ciencia, tan invasora y tan llena de savia, se acentúa cada vez más. Más que nunca, pues, es indispensable una cultura matemática para los jóvenes que se preparan para los estudios de las ciencias naturales, y la insuficiencia de la enseñanza matemática, de año en año, se hace más evidente, en lo que concierne a la sección grecolatina (la que según prescripciones legales debería preparar más especialmente para la facultad de ciencias). Un número considerable de jóvenes escollan todos los años en los exámenes de la candidatura o ingreso en las ciencias naturales, y, en la mayoría de los casos, la causa se debe a falta de preparación matemática.

¿Cuál es el grado de cultura matemática indispensable para hacer de una manera fructuosa y verdaderamente moderna estudios de física (abstracción hecha de la física matemática), de química, de físico-química, de mineralogía, o aun de botánica y de zoología, ya que éstas también han llegado a ser tributarias, en amplia medida, del álgebra y de la geometría?

Muchos libros han sido publicados en los últimos 15 años con el objeto de poner al alcance de los naturalistas y de los químicos el conjunto de las teorías matemáticas que tienen un empleo frecuente en las ciencias experimentales y de observación.

. . . .

. . . .

c) Futuros ingenieros y futuros doctores en ciencias físicas

y matemáticas. — En el ateneo, esos jóvenes siguen los cursos de la sección científica o de la sección latina (sin griego). El curso de matemáticas es común a esas dos secciones. Aquí el carácter concreto no debe ya predominar en la enseñanza matemática, y los ejercicios especulativos no deben subordinarse a las aplicaciones puramente utilitarias; pues los estudios ulteriores se proseguirán en pleno dominio abstracto. En la sección científica, el profesor debe tener en vista, ante todo, la preparación para los estudios universitarios. Ahora, después de una treintena de años, las ciencias matemáticas, el análisis superior en particular, han renovado sus métodos, nuevas teorías han sido introducidas, y las antiguas tienen actualmente desarrollos de que no se las suponía susceptibles no hace mucho tiempo. Para que los estudios superiores de matemáticas puedan dar en la universidad el rendimiento máximo, deberán los futuros doctores familiarizarse, desde el ateneo, con el cálculo infinitesimal que, en sus partes accesibles para jóvenes inteligencias bien dotadas, ha llegado a ser un simple instrumento para las diversas teorías analíticas modernas.

La geometría proyectiva, de fin que ella era, hace unos quince años, se ha transformado en un simple medio para investigaciones más generales o más profundas. Como la enseñanza media debe hacer aprender lo que, en cada ciencia, es considerado como instrumento en la enseñanza superior, consideramos que los elementos de la teoría de las derivadas, del cálculo diferencial e integral, así como nociones extensas de geometría proyectiva, son indispensables desde el ateneo para que los estudios en la universidad puedan producir su máximo de efecto útil. La asimilación de las ramas matemáticas de que acabamos de hablar sólo se obtiene a continuación de numerosos ejercicios; el estudiante ya no puede someterse, al principiar sus estudios superiores, al contralor y a las influencias estimulantes que son admitidas sin protestas en los ateneos y colegios. El trabajo más regular, más metódico y mejor

vigilado, si no es ideal para desarrollar la iniciativa personal, es, sin embargo, el mejor para hacer adquirir conocimientos concretos y adiestrar para la adquisición de hábitos o de aptitudes prácticas.

. . . .

Para la categoría de alumnos de que hablamos, mucho más que para las de otras secciones, habrá que preocuparse de hacerles comprender que la noción de función es fundamental en matemáticas, que las ideas vagas de dependencia, de determinismo, de causalidad, etc., se limitan, se precisan y se fijan por el análisis penetrante y simplificado de los matemáticos, toman cuerpo bajo la forma de *funciones* en las que se condensa definitivamente todo lo que las ideas originales presentaban de útil o real.

No puede ser cuestión de sistematizar un curso sobre las funciones; pero, los elementos de semejante curso serán como el cemento que une todos los demás cursos de matemáticas, para hacer con ellos un edificio cuya armoniosa unidad de plan hiere fuertemente la inteligencia atenta.

Esta unidad no solamente deberá manifestarse por el apoyo que mutuamente se prestan las diversas ramas de las matemáticas; es muy de desear que todos los cursos científicos estén animados de un mismo espíritu y se completen sin dificultades ni repeticiones.

Existe, en efecto, numerosos puntos de contacto entre ciertas ramas y las matemáticas, principalmente en lo que se refiere a las aplicaciones. Para ganar tiempo y llegar más seguramente a resultados serios, los profesores deben entenderse. Tal inteligencia no sólo favorece la solidez de los conocimientos de los alumnos, sino que, además, ejerce una saludable influencia sobre éstos, estimulando sus esfuerzos y aumentando su confianza en el cuerpo de profesores.

Las ocasiones de relacionar las nociones de química a teorías matemáticas son muy raras en la enseñanza media

tal como se encuentra organizada en Bélgica: en la sección greco-latina, solamente una hora se consagra a la química (en la clase de retórica). El curso, por lo tanto, no puede ser extenso; algunos cálculos son necesarios, sin embargo, para determinar las proporciones ponderales de los cuerpos que reaccionan los unos sobre los otros, o la cantidad de uno de esos cuerpos que queda como producto final en el peso o el volumen previsto por la experiencia: para ello basta la aritmética elemental.

En la sección industrial y comercial, la química comporta, en sexto año, dos horas de curso y dos horas de manipulaciones (por semana), y en séptimo año, cuatro horas de curso y dos de manipulaciones; pero el curso toma en esta sección un carácter casi exclusivamente experimental y descriptivo; las matemáticas no pueden encontrar en él una notable importancia, salvo para las aplicaciones que principalmente conducen a cálculos de proporcionalidad, ya señalados, y la que puede ayudar a la determinación de los pesos maleculares.

La física es igualmente experimental en los establecimientos de instrucción secundaria; sin embargo, los puntos de contacto con las matemáticas son aquí mucho más numerosos y más variados que para la química. Notemos desde luego, que es necesario establecer uniformemente la nomenclatura y las definiciones de las medidas y las nociones fundamentales sobre las cuales se hacen las aplicaciones concretas; el metro, el kilogramo, las masas, los pesos específicos, la densidad, aún en las clases inferiores, donde esas nociones se encuentran con frecuencia en los enunciados de los problemas; el conocimiento del sistema métrico sería útilmente completado con un estudio elemental del sistema C. G. S.

Después, en los problemas numéricos que se relacionan con cuestiones de física o de química, es bueno hacer observar que las medidas directas no conducen a resultados perfectamente exactos y concordantes, sino a aproximaciones tanto mayores cuanto más hábil es el operador y

mejor construídos sean los instrumentos; que, por consiguiente, la aproximación de los resultados de un cálculo no debe exceder de la que corresponde a los datos de la experiencia.

Jamás debe perderse contacto con las realidades mismas sobre las cuales se razona y que se someten a las operaciones; las observaciones hechas a este respecto hacen alcanzar el verdadero sentido de los problemas concretos y desarrollan el espíritu crítico.

La importancia capital de la elección de las unidades que representan las cantidades literales de las fórmulas, se manifiesta también cuando se pasa a los cálculos concretos.

Desde los principios, en el quinto año de las humanidades modernas, en el estudio de la física, las fórmulas, se presentan en gran cantidad; son empleadas, como medios de expresar las leyes de los fenómenos, bajo una forma abstracta, pero comprensible. Las que se relacionan con la caída de los cuerpos, con el plano inclinado, con el péndulo, con el movimiento circular, con la composición de las fuerzas, con las presiones y los volúmenes de los líquidos y de los gases, con la dilatación, pueden suministrar material para problemas interesantes, pero que la falta de tiempo no permite abordar sistemáticamente; y, además, cuando tales cuestiones son tratadas en el curso de física, los conocimientos matemáticos no son bastante firmes, ni bastante extensos (principalmente en trigonometría y en álgebra) para que el profesor de física pueda utilizar este excelente medio de repetición sin que se exponga a perderse en largas explicaciones de teorías matemáticas.

En sexto año de las humanidades modernas, a propósito del estudio de la óptica, del magnetismo, y sobre todo de la electricidad, las condiciones se presentan como más favorables a este respecto, pero el programa está entonces tan recargado, que la parte experimental y descriptiva absorbe ordinariamente todo el tiempo disponi-

ble. Habría aquí una amplia cosecha que hacer, si fueran más propicias las circunstancias.

En todo caso, debe limitarse a las cuestiones cuyos datos derivan de hechos, cuyas soluciones son verificables, y que deberían ser verificadas de hecho con tanta frecuencia como fuera posible. Todo teorema puramente especulativo, o abstracto, no tiene porqué figurar en la serie de que nos ocupamos aquí; por este motivo, muchas aplicaciones que se han hecho clásicas, en cierto modo debieran descartarse, puesto que con ellas se arriesga falsear el sentido práctico e inducir en error sobre el verdadero aspecto de las cosas. Para aproximarse más todavía a la realidad, convendría que se hiciera familiar el empleo de tablas numéricas, tan útiles en óptica, en electricidad, etc.

Las series de experiencias que sirven para la verificación de las leyes suministrarían datos para problemas interesantes, los que traducidos en diagramas, contribuirán a hacer comprender bien la idea fundamental de *función* y el carácter sinóptico de todas las representaciones gráficas.

Si el profesor de física tiene escasez de tiempo para ocuparse de las aplicaciones matemáticas, el profesor de aritmética de las clases inferiores y medias dispone, para los problemas concretos, de una mina inagotable de datos interesantes tomados de la física. Muy a menudo serán necesarias explicaciones previas, y aun algunas experiencias hechas ante la clase.

Hace unos treinta años el programa imponía en las clases inferiores conversaciones científicas; después esas conversaciones fueron suprimidas, porque, a lo que parece, los resultados obtenidos eran nulos. Muchas nociones útiles podrían aprenderse durante conversaciones de ese género con tal que, junto con una parte experimental predominante, ellas tuvieran además conclusiones traducidas en números y aplicaciones directas bajo forma de problemas.

Otra rama de enseñanza que tiene las más visibles afinidades con las matemáticas es el dibujo lineal, geométrico o industrial. En las clases inferiores reemplaza, con más o menos éxito, el curso intuitivo de geometría del plano y del espacio del cual nos ocuparemos más adelante, con más detalle. Los alumnos que han seguido las lecciones de dibujo lineal con la atención y el celo que ellas merecen, poseerán prácticamente los elementos de los que la geometría euclídea se ocupa de una manera abstracta; del mismo modo un gran número de propiedades de las bisectrices, de las perpendiculares, de las paralelas, de los triángulos, de los polígonos, del círculo, etc., les serán familiares en el momento de empezar el estudio más sistemático de esos teoremas. Inversamente el hábito de manejar la regla, la escuadra y el compás, será precioso cuando, pasando de lo abstracto a lo concreto, el profesor quiera hacer verificar gráficamente la exactitud de los teoremas o que imponga las construcciones de las soluciones de ciertos problemas. El dibujo científico es, por otra parte, una rama de las matemáticas aplicadas; pues cuando se trata del trazado de sombras, de la perspectiva caballera, de los ejercicios sobre las proyecciones ortogonales, no es de desear que el curso de dibujo se reduzca a indicaciones de procedimientos mecánicos. El conjunto de los trazados y cada detalle deben justificarse, lo que obligará al profesor y a los alumnos a volver con frecuencia, no solamente a la observación directa, sino también a los teoremas geométricos.

. . . .

Entre las materias enseñadas en el ateneo, no hay ninguna que más tenga que recurrir al cálculo que las ciencias comerciales. Desde hace mucho tiempo se hacen esfuerzos, tanto en Bélgica como en otros países, por dar a la enseñanza comercial de los ateneos un alcance científico, exponiendo teorías generales que conducen a las fórmulas, de las cuales fácilmente se deducen todos los casos particulares.

Es evidente que sólo el cálculo algebraico puede servir de vehículo a esas generalizaciones. Todas las cuestiones relativas a los empréstitos a largo plazo, o amortizables por anualidades, lo mismo que la determinación de las rentas viajeras o de las primas de seguros, dan lugar a cálculos interesantes, en los cuales la utilidad de las teorías matemáticas es manifiesta. El empleo de las tablas numéricas del *Text-book* (Instituto de los actuarios de Londres) y las fórmulas de conmutación (con la notación universal) permitirán también resolver prácticamente una multitud de problemas financieros del mayor interés

Aun en las clases inferiores, las cuestiones relativas al interés simple y al descuento son tratadas con predilección en los cursos de aritmética y de álgebra. Pero en las clases superiores de la sección científica y de la sección latina, los problemas financieros (rentas viajeras, seguros, empréstitos) no están en el programa: los alumnos de esas secciones sólo tienen una idea rudimentaria de esas operaciones comerciales y financieras al fin de sus estudios medios. Sin embargo, los ingenieros, llegados a ser directores de importantes establecimientos, están obligados de vigilar y aun de contralorear la contabilidad, de intervenir en las transacciones financieras relativas a sus fábricas. Su instrucción matemática es bastante completa para que, en poco tiempo, puedan ponerse en condiciones de hacer frente a sus obligaciones y aceptar su responsabilidad; no por eso es menos de sentir que sus estudios secundarios no los hayan provisto de los elementos de solución de las cuestiones de álgebra financiera.

En resumen, pues, las ramas de estudio que en la enseñanza media, tienen relaciones directas con las ciencias matemáticas, y cuya influencia sobre estas últimas es más constante y más manifiesta, son, la física, las ciencias comerciales y el dibujo técnico; en menor grado, la química, la geografía y la cosmografía.

El perfeccionamiento y los progresos de la enseñanza matemática repercutirán sobre esas ramas conexas, como recíprocamente, toda mejora séria en éstas dará mayor importancia a las matemáticas, extendiendo sin cesar el campo de sus aplicaciones.

Pero el aspecto utilitario (aplicaciones prácticas y preparación para las carreras científicas, industriales y comerciales) no debe hacer descuidar el aspecto teórico y especulativo que, en las escuelas de instrucción secundaria, no es menos esencial para la educación de la intelicia y de la voluntad.

Según la importancia relativa atribuída a esos dos aspectos, han variado los métodos preconizados para la enseñanza matemática.

El profesor que sobre todo tiene en vista desarrollar la habilidad y la seguridad de la técnica tendrá tendencia de emplear habitualmente el método dogmático, puesto que, de su punto de vista, el rendimiento inmediato es superior al de cualquier otro método. Después de sumarios razonamientos, condensará las conclusiones bajo forma de reglas estereotipadas que, ulteriormente, serán las únicas invocadas y aplicadas sin cesar; no se inquietará porque los principios mismos no hayan sido quizá claramente concebidos por sus oyentes, ni porque los. lazos entre las partes sucesivamente expuestas no hayan sido claramente comprendidos. Los problemas cuya solución ofrece alguna complicación o sutileza le parecerán los mejores; no le preocupará siquiera que el fondo mismo de las cuestiones corresponda a realidades o a posibilidades.

Inútil es decir que los profesores de enseñanza media no pueden identificar su ideal didáctico con tales aspiraciones, ciertamente respetables, útiles en determinadas circunstancias, pero unilaterales y sin impresión duradera sobre la iniciativa personal.

En las clases de programas muy extensos, se verán, es verdad, con frecuencia obligados a exponer ellos mismos ciertos teoremas, a hacer conferencias matemáticas

ante un auditorio, en contemplación admirativa quizá, pero inevitablemente pasivo; sin embargo, se darán cuenta de que no es así como su influencia se ejerce con el mejor provecho de la clase, limitarán sus sesiones a la síntesis poderosa de una serie de verdades establecidas por el método heurístico.

La materia misma de la enseñanza, por su extensión por su diversidad, impone pues parcialmente el método.

. . . .

Todos nuestros profesores belgas admiten que el método analítico, de inducción y de reducción, debe seguirse con la mayor frecuencia posible, que los alumnos deben tener la sensación, o por lo menos la ilusión de descubrir una gran parte de las verdades que constituyen el curso. Guiados por las hábiles preguntas del profesor, estimulados por sus palabras de aliento, comparan atentamente los elementos señalados o reconocidos como los más importantes, sin cesar sacan partido de los conocimientos adquiridos anteriormente, avanzan seguramente hacia el fin o la tésis, y ven finalmente coronados sus esfuerzos con un pleno éxito. El profesor se ha eliminado, no ha impuesto nada; es el alumno que parece haber suministrado todo el trabajo, su energía se ha manifestado y reafirmado.

Pero, para el profesor, la forma socrática es fatigosa y de manejo delicado, sobre todo en las clases numerosas. Interesar esa multitud de alumnos de tan diversos temperamentos, plantear cuestiones concretas claras y sugestivas, escrutar con una mirada las disposiciones de cada uno, y aún arrastrar a los titubeantes y a los distraídos, supone una actividad poco común al mismo tiempo que una ciencia segura de sí misma.

Después de estas generalidades admitidas por todos, veamos lo que se puede hacer de especial en los cursos inferiores, empezando por la aritmética.

En 1.er año, el cálculo práctico, en cierto modo mecánico, debe ser el trabajo principal, tanto en el cálculo

mental, como en el escrito. Todos los alumnos serán ejercitados en ejercicios numéricos, pero siempre referidos a cuestiones concretas. Es por medio de problemas que se llegará a las operaciones que se desea ejecutar; los enunciados deberán interesar a los alumnos.

El sistema legal de pesas y medidas debe ser repetido y aplicado con perseverancia y servir de base a las transformaciones de los números decimales.

Todo género nuevo de problema será introducido con datos muy simples, para que los cálculos puedan ser hechos mentalmente o sin esfuerzo sensible, y que toda la atencion sea dirigida sobre la serie de razonamientos. Después que haya desaparecido todo titubeo en la sucesión de los argumentos, números mayores y ligeras complicaciones vendrán a aumentar las dificultades, e impedirán que las soluciones lleguen a ser rutinarias.

No se trata, en efecto, de hacer estudiar problemas tipos, en número más o menos considerable, y de indicarlos como modelos a imitar; la memoria reemplazaría muy pronto al raciocinio y el ejercicio dejaría de ser aprovechable.

Los problemas en que se presentan multiplicaciones o divisiones por fracciones serán explicados como generalizaciones de las cuestiones análogas sobre los números enteros.

Así la operación $6 \times {}^{3}/_{4}$ no debería ser efectuada abstractamente, sino después de haber sido conducido a ella por un problema tal como: Un metro de paño cuesta 6 francos, ¿cuánto costarán ${}^{3}/_{4}$ de metro de ese paño?

En cuanto al sentido nuevo y a la conservación de la palabra multiplicación se les justificará por la comparación con la cuestión más familiar a los alumnos: Si un metro de paño cuesta 6 francos, ¿cuánto costarán, 3, 5, 8... metros?

Después de haber obtenido muchos resultados de multiplicaciones, o de divisiones por fracciones, se hará notar la manera uniforme como esos resultados se deducen, sea

del multiplicando y del multiplicador, sea del dividendo y del divisor; se hará, pues, formular la regla práctica que ya no será puro verbalismo, como, con demasiada frecuencia, ocurre cuando las definiciones y las reglas son indicadas antes de todo razonamiento, o aún después de cálculos abstractos y de razonamientos demasiado sumarios. Los medios intuitivos son de un empleo indicado y constante en este primer año; y si la presentación directa de los objetos de que los problemas se ocupan, no puede hacerse cómodamente, se la reemplazará por representaciones convencionales, por líneas rectas, rectángulos, etc. Así, para hacer razonar por intuición indirecta sobre el problema siguiente: «Haga Vd. la repartición de 45 plumas entre Pedro, Luis y Santiago, de manera que Luis obtenga 3 más que Pedro, y Santiago 3 más que Luis», se podrá figurar la parte de Pedro por una primera barra trazada en el pizarrón representando provisoriamente las plumas arregladas una a continuación de la otra (el manejo directo de objetos tan conocidos no parece necesario en el ateneo, y sólo sería deseable, aún en la escuela primaria, al principio del estudio del cálculo). La parte de Luis sería figurada por una línea un poco más larga cuyo valor convencional suplementario sería 3; así, para Santiago, una tercera línea sobrepasaría la segunda en 3. Estas intuiciones gráficas traerán de un modo completamente natural las múltiples variantes admisibles en la resolución del problema en cuestión, sobre todo si las tres líneas son horizontales y se apoyan en una misma línea vertical, tomada como recta de partida.

Además, el esfuerzo, bastante mínimo por cierto, para tener en cuenta un símbolo figurativo sustituido en lugar de objetos materiales, será un verdadero encaminamiento hacia las representaciones gráficas cuyo empleo es muy de recomendarse también en las clases siguientes, en 2.º y 3.er año, de las dos secciones de las humanidades.

Habituado el alumno a servirse él mismo, para sus deberes escritos, de líneas rectas en sustitución de toda

clase de cantidades concretas: pesos, precios, capacidades, valores, tiempos, etc, encontrará natural hacer un paso más en la abstracción, efectuando simbólicamente las operaciones numéricas con el auxilio de tales líneas.

Las transformaciones y los cálculos de las fracciones ordinarias se hacen fácilmente comprensibles aún para los espíritus menos preparados, cuando el profesor emplea sistemáticamente el fraccionamiento real de varillas, de cintas, o bien rectángulos, líneas, etc., y que el conjunto de toda esta teoría elemental pierde toda apariencia de puro escamateo con una doble serie de cifras. Hemos dicho, en efecto, que todo nuevo cálculo debe justificarse por su utilidad en la resolución de una cuestión concreta. Procediendo así, desde el principio, lo haremos de conformidad con el desarrollo histórico de toda ciencia; y nos inspiraremos en el método evolutivo tan bien expuesto, principalmente para el álgebra, en las obras elementales de Clairault.

El estudio del sistema métrico, al cual se liga intimamente el de las fracciones decimales, tendrá su punto de partida en el manejo de las medidas usuales y ofrecerá la ocasión de hacer observar y trazar cierto número de figuras o de cuerpos geométricos. El dibujo ofrecerá continuo auxilio, recortes de figuras harán prácticamente comprender la equivalencia de un paralelogramo, de un rectángulo de igual base y de la misma altura, de un triángulo y de un semiparalelogramo, etc. Los cálculos que deben ejecutarse para evaluar la superficie de un rectángulo se justifican fácilmente para dimensiones espresables exactamente en metros, decímetros, centímetros, etc., y el sentido preciso de esos cálculos resultará de la observación misma.

El volumen del cubo, del paralelepípedo rectángulo, se encontrarán por el mismo procedimiento, y las medidas de capacidad, litro, decálitro, centilitro, etc., así como los pesos y las monedas, suministrarán abundante materia para manipulaciones interesantes. El valor relativo convencio-

nal del oro y de la plata amonedados puede fácilmente ser verificado por la igualdad de pesos de dos piezas de cinco francos en plata y una suma de 155 francos en oro, o por el de los equimúltiplos de esas cantidades.

La verificación material de los resultados de los problemas debe recomendarse, aun después que las nociones fundamentales del sistema métrico hayan sido deducidas por observaciones o medidas directas.

La resolución de los problemas forma así la base de la enseñanza matemática en 1.er año; los cálculos se hacen en su oportunidad y las nociones teóricas, poco numerosas pero importantes, se deducen intuitivamente por su intermedio. La atención reflexiva del alumno será dirigida hacia hechos matemáticos, que más tarde serán generalizados bajo forma de relaciones abstractas, de funciones algebraicas o de ecuaciones. Un orden riguroso es, pues, recomendable para la sucesión progresiva de las cuestiones prácticas; pero, ni su elección, ni su gradación podrían ser indicadas en detalle; y menos puede pretenderse imponer para todos un orden idéntico.

En 2.o y 3.er año, la aritmética se hace más abstracta: los problemas tienen en ella un rol importante, pero la teoría se desprende más netamente de la práctica numérica. El programa actual comprende, para la teoría, la multiplicación de los números enteros, la multiplicación y división de las fracciones ordinarias (y la de los números decimales considerados como caso particular de las fracciones ordinarias), los caracteres de divisibilidad por 2, 4, 5, 9 y 3, así como la prueba por 9 de la multiplicación.

No hay nada en tales cuestiones, que no pueda ser presentado a los alumnos de 12 a 13 años (en 2.o año), con la certeza de que comprenderán perfectamente, a condición de proceder metódicamente y de partir de ejemplos bien elegidos. A lo más, podría hacerse objeción para la prueba del 9 de la multiplicación; no porque la cuestión tenga dificultades especiales, sino porque

ella se hallaría mejor en 3.er año, en el cual las pruebas por 9 y por 11 son enseñadas y aplicadas a la división, lo mismo que a la multiplicación.

Por otra parte, para ensanchar notablemente el campo de las aplicaciones numéricas, nada parece oponerse a que la extracción de la raíz cuadrada sea estudiada prácticamente en 2.o año; esta operación no es más complicada, para jóvenes alumnos de 12 a 13 años, que la multiplicación y la división para niños de 10 años en la escuela primaria.

En el orden en que las materias se suceden actualmente, la teoría de la extracción de la raíz cuadrada figura en 6.o año de las humanidades antiguas, o en 4.o año de las humanidades modernas. En esas clases, los programas están muy recargados y falta el tiempo para ocuparse sistemáticamente de los problemas de aplicaciones relativas a las raíces cuadradas. En 2.o año, esos problemas se intercalan fácilmente en el estudio, un poco más desarrollado que en el 1.er año, de las superficies regulares: rectángulo, rombo, trapecio, exágono regular, etc. En 3.er año greco-latino, la parte de la teoría tampoco es exagerada: inversión de los factores de un producto; influencia sobre el cociente y el resto, al multiplicar por un mismo número el dividendo y el divisor; división por un producto de varios factores; carácter de divisibilidad por 11, prueba por 9 y por 11, de la multiplicación y de la división; proporciones.

La teoría generalizada de las fracciones (cociente indicado de dos fracciones) podría ser suprimida sin inconveniente. Por otra parte, el cálculo de las superficies y de los volúmenes (en los casos más simples) y el cálculo del peso de los cuerpos, desaparecerán como materias nuevas en esta clase, puesto que la mayoría de los profesores opinan que el estudio práctico de las superficies, de los volúmenes, y de los pesos corresponde mejor en el 1.o y en el 2.o años. En compensación, el profesor insistirá más sobre la generalización de los resultados sumi-

nistrados por las operaciones fundamentales, como medio de conducir hacia el cálculo algebraico y a la resolución de ecuaciones de coeficientes numéricos.

Daremos algunos ejemplos de la manera cómo un mismo principio teórico se completa gradualmente en 1.º, 2.º y 3.er años. ¿Se trata de hacer comprender, en 2.º año, que si se multiplica el dividendo y el divisor por un mismo número, el cociente entero no cambia, pero que el resto resultará multiplicado por ese número? Los alumnos son conducidos, para la solución de cuestiones concretas simples, a hacer las divisiones: 27 peras divididas por 6 peras, da el cociente entero 4 y el resto 3 peras.

27 m. : 6 m. da el cociente entero 4 y el resto 3 m.

27 kl.: 6 kl. » » » » 4 » » » 3 »

27 sombreros: 6 sombreros da el cociente entero 4 y el resto 3 sombreros.

Esta primera serie mostrará la no variación del cociente entero y la variación del resto. Una segunda serie hará que se dé un paso más:

27 decenas: 6 decenas da el cociente 4 y el resto 3 decenas.

27 centenas: 6 centenas da el cociente 6 y el resto 3 centenas.

27 millones: 6 millones da el cociente 6 y el resto 3 millones.

De ahí, el principio se deduce fácilmente: pues si ahora se pregunta a los alumnos como resultan el cociente y el resto si se multiplica 27 y 6 por 12, responderán inmediatamente: esto equivale a dividir 27 docenas por 6 docenas; el cociente entero es, pues, 4, pero el resto será 3 docenas, o 3×12.

Estos procedimientos inductivos dan, pues, a los alumnos la noción exacta y la causa profunda del principio. Este será nuevamente considerado en 3.er año y demostrado por el método deductivo.

Supongamos, ahora, que se trata del carácter de la

divisibilidad por 9. En 1.er año estableceremos prácticamente la regla relativa a la suma de las cifras por medio de una serie de ejemplos y de verificaciones. Damos, pues, a conocer el hecho matemático y lo enunciamos en forma de regla. En 2.o año, demostraremos, por los lemas habitualmente empleados, que un número es divisible por 9, cuando la suma de sus cifras, tomadas en su valor absoluto, es un múltiplo de 9; es decir, que nos limitaremos a la consideración de la condición *suficiente*, porque es de temerse que la inteligencia de muchos alumnos no comprendería todavía claramente la distinción fundamental entre una condición *necesaria* y una condición *suficiente*. Debe prevenirse esta confusión, separando claramente, por la supresión provisional de una de esas nociones, las dos faces del problema; se evitará así que el conjunto de los razonamientos llegue a ser una cuestión de simple memoria. La demostración completa se dará en 3.er año, y entonces será el caso de insistir, por medio de ejemplos juiciosamente presentados, sobre la noción lógica, fundamental, de lo que, en un principio matemático, se entiende como condición *suficiente* y como condición *necesaria*.

Los alumnos se interesarán en encontrar, en las circunstancias de la vida usual, casos en los que esta distinción es tan esencial como en las matemáticas.

En 2.o y 3.er años, las resoluciones de numerosos problemas se agruparán alrededor de ciertas nociones prácticas particulares.

En 2.o año, el interés simple, el descuento comercial, las mezclas y aligaciones son especialmente indicados a la atención del profesor; el procedimiento recomendado es el de la reducción a la unidad.

En 3.er año se agregan los problemas sobre vencimiento común, el descuento interior, la regla de sociedad y todo lo que se refiere a tanto por ciento o por mil. Uno de los procedimientos recomendados es el empleo de la regla de tres simple y compuesta. Parece que el descuento in-

terior y la regla de sociedad podrían ser descartados sin perjudicar al carácter práctico del conjunto. El descuento interior se volverá a encontrar, en lo que realmente tiene de útil, como aplicación de las fórmulas de los intereses compuestos (en 6.º año de humanidades antiguas, y en 5.º año de humanidades modernas), y la regla de sociedad merece apenas una mención especial cuando se enseñan las reparticiones proporcionales.

La naturaleza misma de las cuestiones a resolverse en 3.er año no difiere, pues, esencialmente de los que se indicaron para el 2.º; pero el fin de los razonamientos es otro: en 3.er año, la fórmula general debe resultar de una serie de problemas particulares; después esta fórmula debe aplicarse directamente a la investigación rápida de las soluciones numéricas.

En ambas clases, los procedimientos de resolución gráfica prestarán grandes servicios, desde luego porque dan un apoyo serio a la atención, enseguida porque interesan vivamente a los alumnos, después porque los familiarizan con un medio poderoso para las investigaciones personales, y en fin porque los inicia en la representación de las funciones y en la geometría analítica.

Nuestra apreciación de las ventajas de esos procedimientos no debe hacernos descuidar sus inconvenientes. Desde luego, su empleo postula verdades geométricas que no es posible establecer sólidamente en las clases inferiores, enseguida, que las soluciones que esas representaciones dan son sólo aproximadas, y que esta aproximación es con frecuencia insuficiente cuando varias de las líneas empleadas se cortan bajo un ángulo muy pequeño, o cuando la escala adoptada es demasiado reducida; ésto sin hablar de la falta de habilidad de los jóvenes dibujantes.

El primer inconveniente, de orden teórico, es despreciable, en tanto, que los trazados sólo contengan líneas rectas. En efecto, si hay que representar los valores 1, 2, 3, 4 metros de paño, de 3 francos de costo el metro,

cortas explicaciones harán comprender lo que el gráfico (fig. 1) que contiene los puntos A, B, C, tiene de plau-

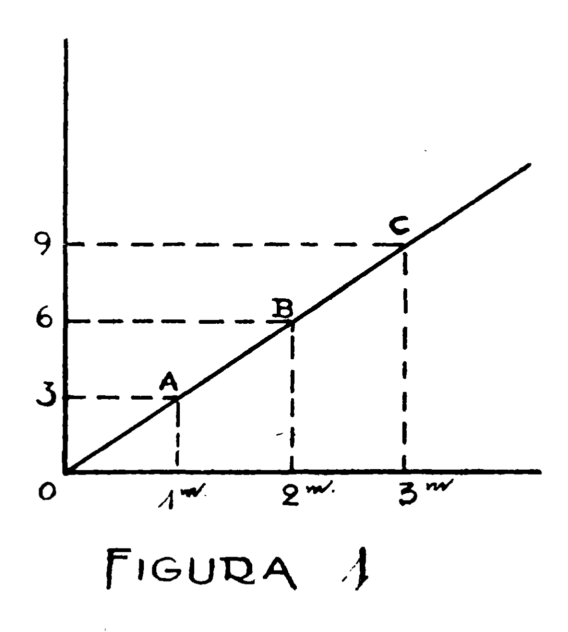


FIGURA 1

sible; en seguida se mostrará, por las medidas directas, que el segmento de recta 0 A contiene también el precio de $^1/_3$ o de $^2/_3$ de metro etc.; después, por la traslación paralela (fig. 2) se atribuirá una significación análoga a los segmentos AB, BC; en fin, el empleo de una regla hará ver que todos los puntos de referencia A, B, C, están sobre una misma recta. El papel cuadriculado milimétrico será con frecuencia de gran utilidad para neutralizar la falta de habilidad del dibujante y para llegar al resultado con rapidez.

El principio gráfico que permite figurar por una recta el precio, en función de la longitud y del precio unitario, se hará familiar a los alumnos mediante la ejecución de numerosos ejercicios.

La ganancia, la pérdida, el interés, el descuento, etc., son simples casos particulares, que pueden ser tratados absolutamente de la misma manera.

La objeción relativa a la poca aproximación de las soluciones gráficas no debe impedirnos acordarle una gran

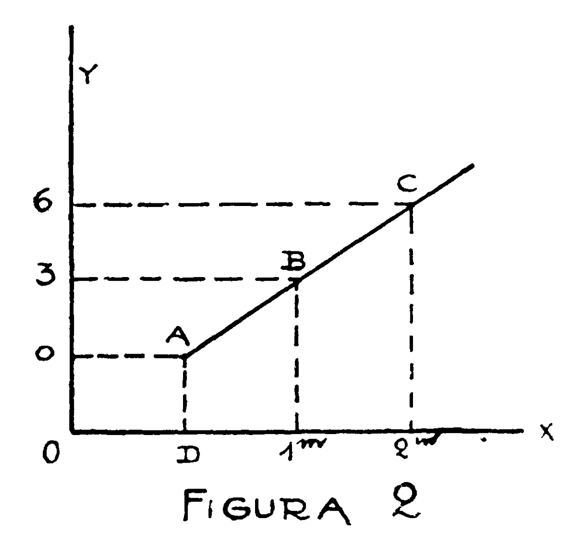


FIGURA 2

importancia didáctica y metodológica; pues no nos contentamos con esas soluciones, pero las utilizamos solamente como medio de llegar rápidamente a un resultado relativo.

Para dar un ejemplo de la fecundidad de los procedimientos gráficos utilizables en las clases inferiores (2.º y 3.º) consideremos alguna cuestion de mezclas y aligaciones. (Los problemas relativos al encuentro de viajeros, de carruajes, etc, son aún más interesantes; Laisant se ocupa de ello con alguna detención en su *Iniciación matemática*).

a) *Una solución salina contiene 80 gramos de sal común en 0.45 litro de líquido. ¿Cuánta sal contendrá 0.75 de ese líquido?.*

Este problema que sirve de introducción a la serie, se resuelve fácilmente cuando el punto A es determinado según el enunciado. El gráfico (fig 3) da 133 gramos de sal para 0.75 del líquido (el cálculo daría 133.33). Para completar las nociones preliminares plantearemos otras cuestiones a propósito de la figura.

Por ejemplo: *¿en qué cantidad de líquido se encuentran 100 gramos de sal?*

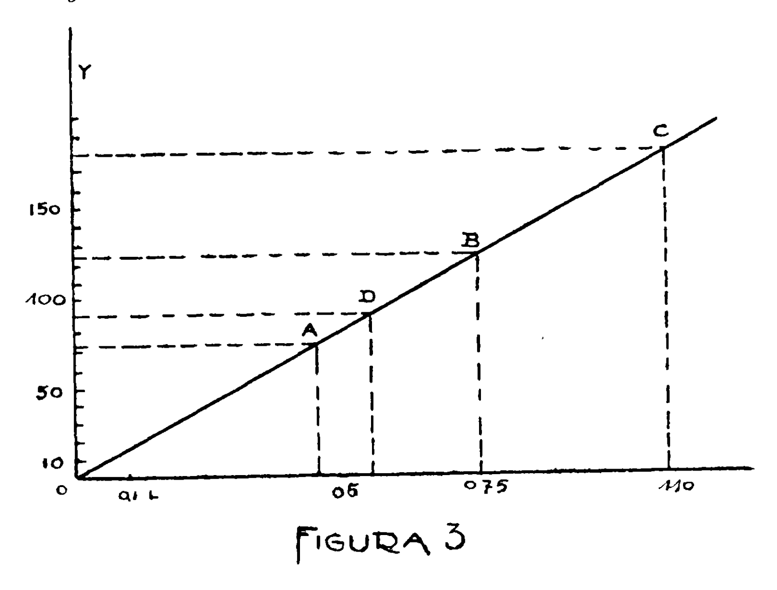


FIGURA 3

Consideremos ahora la influencia de la evaporación parcial del agua, o el caso de una dilución de la solución, o el de una agregación de sal.

Durante la evaporación de 10 centilitros de agua, la solución contiene la misma cantidad de sal: A viene hacia I y O I dará la característica de la nueva solución para A I = 10 centilitros. Inversamente diluyendo el líquido, A se mueve hacia I H y H O corresponde a una nueva solución obtenida agregando 25 centilitros de agua a 45 centilitros del líquido primitivo.

El caso en que se agrega la sal, se trata de la misma manera; o I corresponde a una solución que resulta de la agregación a 45 centilitros del líquido primitivo, 55 centilitros de agua, y una agregación de 20 gramos de sal.

En otros ejemplos, será más natural hablar de una disminución en el tenor del cuerpo principal puesto a mezclar, y el trazado no ofrecería mayor dificultad.

Estos ejercicios de preparación familiarizarán rápidamente a los alumnos con los trazados que figuran las mo-

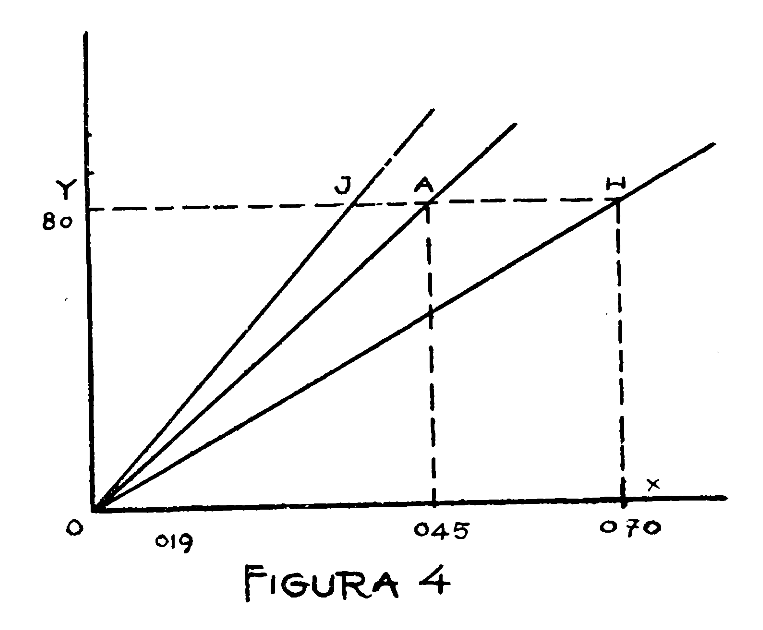


FIGURA 4

dificaciones en el valor de las variables y de las constantes del problema, y las cuestiones de mezclas o de aligaciones se resolverán desde entonces muy fácilmente.

b) Se han fundido juntos 5 kg. de una aleación compuesta de 7 partes de plata y 4 partes de cobre, con 7 kg. de otra aleación compuesta de 2 partes de plata y 3 partes de cobre. ¿Qué porcentaje, en cantidad de plata, contendrá el lingote?

Sobre OX (fig. 5) llevamos los pesos de las aleaciones diversas, y en la dirección perpendicular, los pesos de la plata sola.

Tendremos en O M la recta que corresponda a la primera aleación (7 partes de plata por 4 partes de cobre) y en O G la recta que se refiere a la segunda aleación,

El peso de la plata contenida en el primer lingote es B A.

Para tener en cuenta la agregación del segundo lingote, que pesa 7 kg. se podría representar en H I el peso de la plata de ese lingote y agregar a B A la longitud H I; pero es preferible transportar la representación O H I del segundo lingote paralelamente así mismo hasta A E D (el vértice O, ya en B, desliza a lo largo de B A).

El lingote resultante tiene por peso total O N y su tenor absoluto en plata es N D (alrededor de 6 kg). La recta O D figura pues las proporciones relativas de plata para el lingote resultante. Ahora, como se pide el tenor relativo en centésimas, sólo tenemos que medir K F y tomar diez veces el resultado; encontramos K F = 5; luego el lingote final, que pesa 12 kg. contiene 50 o/o de plata (el cálculo da 49'9 o/o).

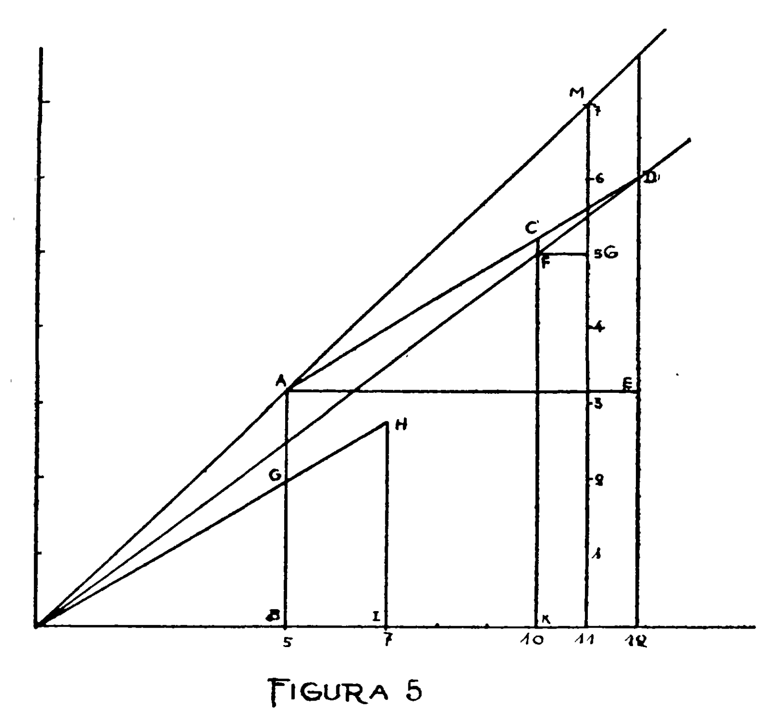


FIGURA 5

Después de haber hecho trazar los gráficos de varias

cuestiones análogas, se deducirá de las figuras algunas observaciones que simplifican el dibujo y que serán utilizadas en los problemas en que los pesos absolutos de los lingotes, o de uno de ellos, ya no son conocido. Entre otros corolarios, debemos hacer observar que O B C puede ser suprimido y directamente reemplazado por A B' C', si A B, es paralelo A O X y rinde 5 unidades de este eje, y que B' C' paralelo a 04, mide A O X, rinde 2 unidades de este último eje. O bien, cuando O B C ya está trazado, que A D es paralela A O G (a dibujar por medio de la regla y la escuadra) y termina en la perpendicular N E, sobre O X, trazada a 7 unidades más alla de A.

La ventaja de figurar las unidades sobre O X a una escala diferente de las que se miden a lo largo de O X puede también señalarse.

Esos trazados no deben degenerar en procedimientos puramente mecánicos; cuanto mayor sea el número de elementos modificables, más habrá que insistir sobre la jus tificación de los valores que son atribuídos en cada caso particular. Las observaciones hechas a propósito de esos trazados estimularán más las iniciativas personales que los procedimientos generales.

Como recapitulación de los principios ya conocidos, propondremos el problema siguiente:

c) *En un mismo recipiente se echan 45 centilitros de alcohol a 60° centigrados, 25 centilitros a 80° y 15 centilitros a 90°. ¿Cuál será el tenor de la mezcla?* (se desprecia la contracción, que por otra parte es poco sensible en este caso).

Trazamos (fig 6) las rectas O M, O N, O R que figuran los alcoholes a 60,° 80° y 90° centesimales.

En F para los 45 centilitros del primer líquido, en G 25 divisiones más distante, y en H que estará a la 85° división ($45 + 25 + 15 = 85$) trazamos paralelas a OH. En A, donde la primera perpendicular corta a O M, trazamos A C paralelamente a O N hasta G; allí trazamos G E paralela a O R. Entonces H E es la cantidad total de alco-

hol contenida en la mezcla y O E figura las proporciones de esa mezcla. El grado centesimal está indicado en P sobre la prolongación de O E; la figura da 72°, y el cálculo 71'2.

Es evidente que la misma recta figurativa O E debe ser obtenida cualquiera que sea el orden en el cual los líquidos componentes están representados; de ahí seis variantes, y otras tantas verificaciones.

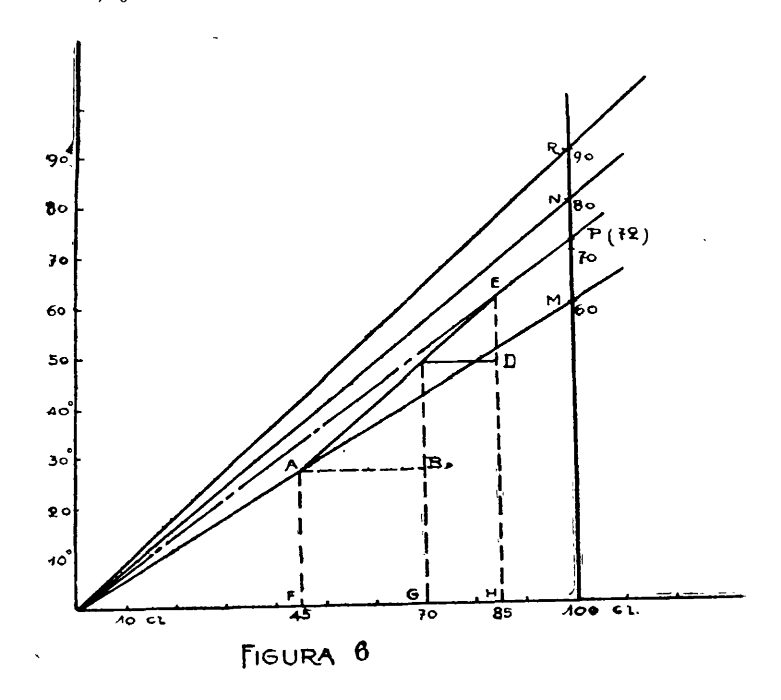


FIGURA 6

Se dejará al alumno la elección de una de estas, pues no es posible ejecutarlas todas sobre un mismo dibujo.

La recta O S, figurativa del alcohol absoluto, divide el plano en dos regiones: entre O X y O S se encuentra la región donde todas las mezclas tienen sus líneas figurativas; más allá de O S se encuentra una región que, en cierto modo, corresponde a mezclas imaginarias; además ninguna inclinación de nuestras figuraciones puede sobrepasar la de O S sobre O X.

Junto a las indicaciones que directamente se relacionan con la investigación del resultado pedido, únicas de las que podemos ocuparnos aquí se tendrán en cuenta observaciones sobre las circunstancias de la práctica en las cuales los problemas del género que consideramos se presentan, sobre la utilización eventual de las sustancias obtenidas, o de los ingredientes empleados.

A la cuestion *(b)* se relaciona una corta observación sobre las soldaduras de plata, por ejemplo; a la cuestión

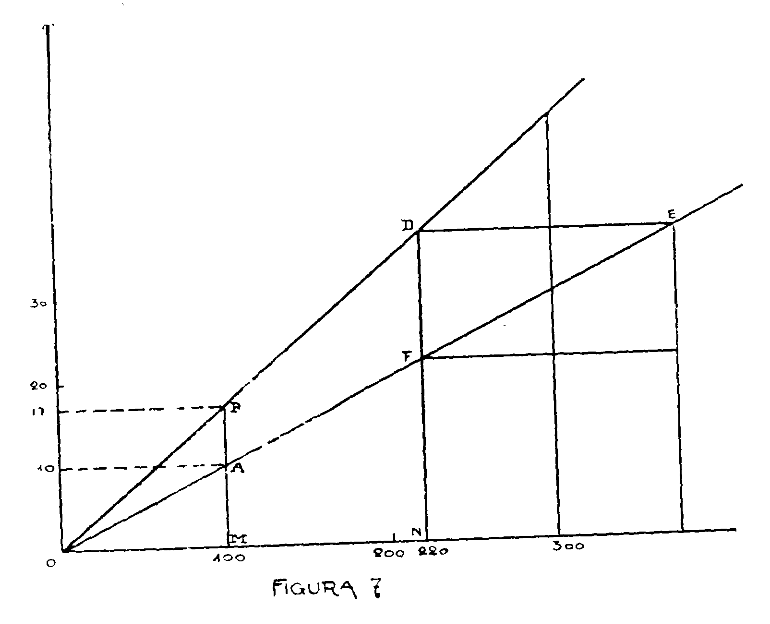


FIGURA 7

(c), alusiones sobre la composición de los licores fuertes, en los cuales el empleo del alcohol como líquido preservador y fijador en los laboratorios de botánica, de zoología, etcetera.

d) Bajar a 10 %, por agregación de agua, 220 centímetros cúbicos de una solución a 17 % de sulfato de cobre.

Las rectas O A, O B pág. 7 representan las soluciones a 1 % y a 17 % y N D permitiría determinar el número de gramos de sulfato contenidos en 220 centímetros cú-

bicos de la solución dada. Durante la dilución el peso del sulfato permanece el mismo; una paralela D E a O X nos llena a E sobre O A, línea de la solución de 10 °/o. El volumen de 220 centímetros cúbicos debe pues ser aumentado en D E, convertido en centímetros cúbicos, o en N P; se encuentra 154 centímetros cúbicos.

La misma gráfica da la respuesta a esta cuestión: *Elevar a 17 °/o, por adición de sulfato de cobre, 220 centímetros cúbicos de una solución de sal a 10 °/o.*

La medida de D F dará el número de gramos de sulfato necesarios para aumentar la concentración D F correspondiendo a 15 g. 4.

Comparando las soluciones de esos dos problemas conexos, observamos que 15. 4 es igual a 10 °/o de 154. Fácil es ver que así debe ser, y generalizar esta relación; pues F G siendo paralela a O X, el triángulo F E G es idéntico a D F E; como consecuencia de las construcciones y de los corolarios, ya notados anteriormente, E G debe valer 10 °/o de F G, como A M vale 10 °/o de O M. en la escala de las unidades adoptada.

e) ¿En qué relación hay que mezclar soluciones de una misma sal a 8 °/o y a 15 °/o para obtener una a 10 °/o?

Después que las rectas representativas de las proporciones 8 °/o, 15 °/o han sido trazadas, la cuestión viene a ser encontrar sobre O M un punto A, tal que la paralela trazada desde A a N O llegue a P.

Basta así conducir esta paralela por P mismo, y prolongarla hasta encontrar O M en A. La relación pedida es la de los segmentos O B, B C. El trazado puede modificarse de modo que, en caso necesario, O B o B C represente las cantidades asignadas de antemano para las soluciones componentes.

Los problemas relativos al interés simple, descuento comercial, los seguros, vencimiento común, etc. Fácilmente pueden ser tratados por trazados análogos. Los cálculos directos son evidentemente indispensables y aun será útil el dar a conocer diversos procedimientos de

cálculo, sobre todo los que se usan en la práctica de los negocios. La investigación de los intereses de un capital. por las partes alícuotas del tiempo, o de la tasa, constituye un ejercicio cuyo valor educativo es superior al de la reducción a la unidad. Esta reducción, o regla de tres, aplicada sistemáticamente, con exclusión de otros métodos, disfraza el verdadero razonamiento, alarga y complica la solución de muchos problemas, y se convierte, para los alumnos, en un mecanismo irreflexivo.

El descuento interior, o racional, calculado sobre el va-

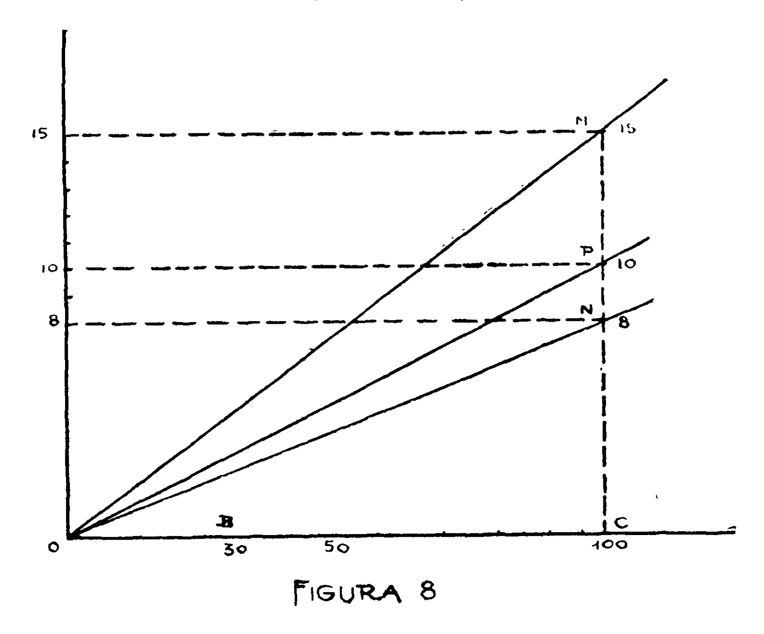


FIGURA 8

lor actual no tiene ninguna utilidad práctica; ya hemos propuesto eliminarlo del programa de las clases inferiores. En cambio, parece necesario insistir sobre las ventajas de mostrar en clase y de hacer circular entre los alumnos verdaderos efectos de comercio. El análisis de algunos documentos de esta clase dará más vida y más interés a todas las cuestiones de cálculo de descuento.

Ese no es, por otra parte, más que un caso particular

de la tendencia a basar todos los razonamientos sobre los resultados de la observación directa. Hay, principalmente para el descuento, motivos especiales para proceder así en la sección de las humanidades antiguas. Los alumnos de esta sección reciben lecciones de comercio, y si el profesor de matemáticas no las suple, al tratar los problemas sobre descuento, interés simple, tara etc., la mayor parte de los retóricos saldrán del ateneo sin tener, por ejemplo, ninguna idea de la letra de cambio, que es uno de los instrumentos del comercio internacional.

En la resolución de los problemas por el cálculo directo y por las gráficas, habría que relacionar, en 3.er año, y aún en el 2.o año, para los casos más simples, la iniciación del método algebraico.

No se trata evidentemente del cálculo puramente literal o abstracto, sino de la introducción de signos de abreviación que reemplacen los números desconocidos, y después números cualesquiera (fórmulas generales).

La confección de diagramas, y su reducción a una escala dada, vendrán fácilmente a propósito y aportarán a los alumnos una cantidad de hechos útiles e interesantes; incremento de la población de una ciudad, de un país; variación diurna, mensual, anual, de la temperatura; solubilidad de las sales corrientemente empleadas; precios de algunas sustancias alimenticias a través de los siglos; importación, exportación, etc.

En este tercer año, cuyo programa matemático sería el mismo en las dos secciones de humanidades, algunas nociones intuitivas de *geometría* prepararían para el estudio sistemático de esta ciencia en 4.o año y en los siguientes.

Una colección de sólidos de caras planas: prismas diversos, pirámides, poliedros regulares... y también sólidos de caras curvas: esferas, cilindros, conos... es indispensable para familiarizar a los alumnos con las nociones de plano, superficie convexa o cóncava, línea recta o curva, ángulo en general. Los mismos cuerpos representados por sus aristas de alambre, o por líneas apropiadas

darían el material necesario para aprender a ver en el espacio y a interpretar rápida y exactamente un dibujo de sólido figurado en perspectiva.

Este material ha sido empleado en 2.º año, y también en 1.º, para explicar los nombres de los sólidos más simples y de sus elementos superficiales y lineales; ha servido para calcular volúmenes y áreas.

En 3.er año, agregamos la comprobación de propiedades que son susceptibles de verificación inmediata. Establecemos una serie de hechos geométricos cuya unión lógica será estudiada más tarde.

Los propios alumnos deben ejercitarse en recortar en papel o en cartón las figuras geométricas: en ajustar y armar con alambre, cubos, pirámides, cilindros, troncos de cono; en una palabra, dedicarse a un trabajo manual de fin geométrico.

Nada más fácil, entonces, que mostrarles que dos triángulos son iguales cuando tienen tres lados iguales, uno a uno; que esta proposición no puede ser extendida a un cuadrilátero, ni a cualquier polígono; que dos triángulos rectángulos son iguales cuando tienen la hipotenusa igual y un lado (o un ángulo) igual; que el triángulo isóceles tiene dos ángulos iguales que son opuestos a los lados iguales; que la suma de los ángulos de todo triángulo es igual a dos ángulos rectos.

Otras propiedades se comprobarán por medio de un dibujo hecho con cuidado: centro de gravedad, ortocentro, centro de círculos inscriptos y circunscriptos; proporcionalidad de los lados homólogos en dos triángulos que tienen los lados paralelos uno a uno.

Por medio de figuras recortadas se podrá verificar que un paralelogramo es equivalente a cierto rectángulo; que el triángulo es la mitad de un paralelogramo, que el cuadrado construído sobre la hipotenusa de un triángulo rectángulo es equivalente a la suma de los cuadrados construídos sobre los catetos.

Una banda de papel arrollado alrededor de diversos

discos perfectos, o alrededor de cilindros bien hechos enseñará que la razón de la circunferencia al diámetro es constante e igual a 3.14 aproximadamente.

Bien entendido que el profesor recordará *con frecuencia* que no se trata aquí sino de simples comprobaciones, que las razones verdaderas de todas esas propiedades métricas y de otras, serán dadas ulteriormente. Y aún debe evitarse recurrir a semejantes demostraciones, puesto que el alumno no distingue todavía cual es la esencia de una demostración rigurosa en geometría; el gran peligro reside aquí precisamente en que el alumno, creyendo poseer la causa lógica de su saber concreto e intuitivo, no se desinterese más tarde de la teoría geométrica. Por otra parte, como ha sido observado respecto del álgebra, la ciencia en sí misma no ha sido establecida de otro modo que como deseamos ver proceder en tercer año para los teoremas fundamentales de la geometría plana y de la geometría de los sólidos.

En lo que se refiere a los sólidos bastaría evidentemente hacer notar y reproducir las diversas posiciones respectivas, en el espacio, de los planos, de las rectas, de los puntos; y de hacer calcular los volúmenes de los prismas, de las pirámides, de los cilindros y de los conos rectos, y las superficies totales de esos cuerpos, después de haber hecho realizar, con papel, el desarrollo de esas superficies.

¿En qué orden serán enseñadas esas nociones preliminares, tanto para el álgebra como para la geometría?

Sería temerario indicar un orden que debiera seguirse invariablemente en todas partes y siempre. Todos estarán de acuerdo, creemos, para desarrollar las propiedades poco más o menos en el orden en que ellas serán enseñadas más tarde, con todo el rigor deseable. Hacemos reserva, sin embargo, para las nociones que se relacionan a los cuerpos sólidos que ocuparían mejor el primer sitio, que ellas sean tratadas al mismo tiempo que las propiedades análogas para el plano.

A pesar de la completa libertad dejada al profesor, un texto nos parece indispensable; en el orden que prefiriera el profesor, contendría varias series de propiedades geométricas susceptibles de ser enseñadas en 1.er año, 2.o y 3.o, con numerosas figuras y los elementos de interesantes aplicaciones. A medida que el profesor haga aprender una de esas propiedades, en el orden adoptado por él, según las necesidades de su enseñanza, haría anotar en el texto los números correspondientes. El mismo libro contendría también problemas sumariamente resueltos por el método algebraico (ecuación de 1.er grado con una incógnita) y los elementos para formular los enunciados de otros problemas y para dibujar múltiples diagramas.

Los enunciados y las demostraciones de los teoremas aritméticos, siempre para las tres clases inferiores solamente, tendrían también su sitio en el texto.

El profesor, pues, tendría libertad en cuanto al orden y podría darse cuenta, después de cada mes, del camino recorrido y del que falta recorrer.

Los alumnos no estarían obligados a volver a transcribir las notas tomadas en el curso, notas que raras veces son correctas y completas.

Por otra parte, los cursos dictados estando proscriptos en la enseñanza media de Bélgica, no habría medio de proceder reglamentariamente de una manera muy diferente de la que acabamos de croquizar.

En las clases inferiores, la ausencia de texto ofrece todavía más inconvenientes que en las superiores.

En lo referente a la redacción de nuestro texto, muchos profesores son de opinión que el cuerpo profesoral debería ser invitado a colaborar; el Consejo de perfeccionamiento examinaría los manuscritos y apreciaría cuáles son las partes que merecen ser publicadas. Las críticas de ese Consejo serían comunicadas y se formaría una recopilación metódica con las comunicaciones consideradas mejores; se llegaría así, probablemente, a una

clasificación juiciosa de los ejercicios, basada sobre el desarrollo de las ideas contenidas y sobre las relaciones matemáticas puestas a contribución.

Libros de matemáticas recomendados para las clases superiores podrían resultar de los esfuerzos colectivos del mismo género.

La experiencia y el método de algunos de ellos resultarían así aprovechables para todos. Una revista oficial que publicara regularmete las proposiciones de los profesores relativas a los métodos y al material didáctico, podría ejercer una influencia feliz sobre el perfeccionamiento de la enseñanza matemática, aunque más no fuera que habituando cada uno a hacer la crítica de sus procedimientos personales y deteniendo así una rutina siempre perniciosa.

Con el tercer año concluye el primer ciclo de los estudios matemáticos, las cuestiones concretas en él figuran en el primer plano, mientras que las demostraciones abstractas sólo son consideradas en segundo término.

Las nociones establecidas intuitivamente y aplicadas con perseverancia, hacen desde entonces parte integrante de un saber restringido pero bien asimilado.

El segundo ciclo, que comprende las cuatro clases superiores, desarrollará esas nociones y, gradualmente, edificará la ciencia más abstracta sobre esos fundamentos sólidos. En esas clases, trataremos de obtener del alumno un trabajo intensivo y personal; aquí, ya no basta la atención sostenida, mucho menos todavía que en el primer ciclo; el espíritu de iniciativa debe manifestarse y ser estimulado. Numerosas serán las ocasiones en las que los alumnos podrán darse cuenta de los progresos obtenidos por sus propios esfuerzos, y en esta reconfortante comprobación adquirirán la energía para marchar resueltamente adelante.

De este punto de vista, sería conveniente que los alumnos de 6.º y 7.º año, por lo menos para la sección científica, fueran obligados a hacer preparaciones, teóricas y

prácticas, bajo la vigilancia del profesor; éste los guiaría discretamente, en caso necesario, para evitar pérdidas de tiempo; estimularía su acción por su excitación y sus benévolas apreciaciones y los habituaría a buenos métodos de trabajo.

La transición a la enseñanza superior, en la que los jóvenes están librados completamente a sus propios medios, se encontraría así dispuesta en provecho de los estudios universitarios, y aun de la ciencia, que reclutaría más fácilmente entre esas jóvenes inteligencias entusiastas, adeptos fervientes, capaces y desinteresados.

En efecto, lo que desalienta a muchos alumnos, por otra parte bien dotados y llenos de buena voluntad, es no solamente la manera demasiado abstracta, seca y dogmática como son enseñadas las matemáticas por profesores que desdeñan los preceptos de una sana pedagogía; es también, y principalmente, la esterilidad de sus esfuerzos, torpemente derrochados, para resolver las cuestiones de aplicación; es la inhabilidad efectiva para obtener resultado de nociones cuya adquisición les ha costado, generalmente, mucho tiempo y trabajo.

Fuera de los problemas que tienen solución directa en las teorías estudiadas, siempre convendrá dar cortas indicaciones, sea sobre la marcha a seguir, sea sobre los principios utilizables, sea sobre la naturaleza del resultado.

Los problemas de construcción, en geometría, por ejemplo, serán, pues, agrupados con ventaja en algunas categorías, (como los que se indican en la conocida recopilación de Petersen), a los cuales podrán recurrir los alumnos de menor preparación.

En la exposición de las lecciones no dejará de hacerse notar el uso eventual de los principios demostrados y de esbozar las condiciones ordinarias de su aplicación, apoyándose en ejemplos.

Observemos que estos ejemplos y los casos particulares de las verdades generales toman, en este segundo ciclo, el rol de la intuición concreta o de la observación directa del primer ciclo.

Constituyen el mejor medio de abrir a las inteligencias un poco lentas el dominio de las ideas generales y de la abstracción. Además, la observación misma reaparecerá cada vez que elementos nuevos se introducen en nuestros cursos.

Las modificaciones que, en opinión de nuestros profesores, deberían hacerse en los programas de las diversas clases han sido resumidas más atrás.

Las supresiones se refieren principalmente a las teorías aisladas o de poca utilidad inmediata, sea en la enseñanza media, sea en la superior.

Las extensiones y los agregados se inspiran en la tendencia general de suministrar al joven estudiante universitario el bagage matemático indispensable para las ciencias modernas, y a dotar su espíritu de hábitos de rigor, de claridad y de precisión.

La repartición del conjunto de las materias en los cuatro años de estudio [1] no podría hacerse aquí; las indicaciones generales resultan, por otra parte, directamente del fin que motiva las modificaciones propuestas. Agreguemos solamente que, en la sección de humanidades modernas, el número de lecciones debería elevarse a *cinco* por semana en 4.º año, para compensar la lección que hemos suprimido en el 3.º a fin de que el pre-ciclo fuera común a las dos secciones.

En 5.º, 6.º y 7.º año de la sección científica, se conservaría, respectivamente, seis, cinco y ocho lecciones semanales.

En la sección greco-latina, tres horas por semana continuarían consagrándose a las matemáticas.

Como para el ciclo inferior, relacionamos algunas observaciones sobre puntos particulares del programa.

La *aritmética teórica,* tratada según los métodos de intuición indirecta esbozados más arriba, pierde mucho del aspecto antipático que generalmente le da otro método.

---

(1) Se refiere al 2.º ciclo

a) La teoría del máximo común divisor de dos números puede introducirse de varias maneras. Una de ellas consiste en hacer comprender la ventaja que suministra el conocimiento de semejante divisor. Un cálculo de fracciones ordinarias nos pone en presencia de un resultado tal como $\frac{152}{285}$; los esfuerzos de los alumnos para simplificarlo serán probablemente vanos. Sin embargo, se les hace ver que 19 es un divisor común de los dos términos. Presentándose otros casos análogos, se hará notar que la marcha seguida, y que consiste en suprimir los factores comunes, 2, 3, 5... es a veces larga, y que para fracciones que no sean muy simples, no se tiene la seguridad de llegar por ese procedimiento a la expresión más reducida.

Habiendo así excitado el interés para encontrar el máximo común divisor, daremos a conocer algunos procedimientos, calcados sobre la marcha general, pero que atenuarán todavía la dificultad y que prepararán la vía a la demostración completa. La fracción $\frac{184}{207}$ nos embaraza; pero si hay un factor común de ambos términos debe dividir su diferencia $207 - 184 = 23$: en lugar de tantear, somos inducidos a ensayar si 23 divide a 184 y 207: se encuentra que la fracción puede reducirse a $\frac{8}{9}$. Hacemos observar que la eficacia del procedimiento se debe a la pequeñez de la diferencia 23; lo que nos lleva a retener que si el doble del término menor puede restarse del mayor, tenemos interés a hacer la sustracción una vez más, una tercera en caso necesario. Al mismo tiempo una repetición de principios importantes permitirá que intervengan todos los alumnos, aun los menos preparados.

Avanzando un poco más, y forzado por las dificultades que ofrecen nuevos ejemplos numéricos, somos conducidos a hacer la división del término mayor por el menor, y recordar el principio: «todo número que divide el dividendo y el divisor divide el resto». La sustitución del grupo de los dos números 637, 455 a los números dados 1727, 637 es así fácilmente legitimada en lo que se refiere

a su máximo común divisor. Las dos partes de esta demostración del lema fundamental no suscitan ninguna dificultad, lo mismo que las reducciones sucesivas y análogas de los grugos 455 y 182 — 182 y 91.

A medida que se van encontrando esos grupos equivalentes, se tiene cuidado de colocarlos en evidencia los unos debajo de los otros, para obrar tanto sobre la vista como sobre el oído y multiplicar las sensaciones que convergen hacia el mismo punto del cerebro y se presten mutuo apoyo.

Las propiedades del máximo común divisor y de los restos sucesivos se deducen ahora de la consideración de esos grupos superpuestos; y la disposición ordinaria de los cálculos, la más cómoda para la práctica, sin trabajo queda justificada por los mismos alumnos.

En fin, hecha la recapitulación y efectuados los cálculos con ejemplos y a propósito de problemas de aplicación, podrá fácilmente ensayarse la demostración por medio de notaciones generales A, B, R_1, R_2, R_3... cuyo sentido intrínseco será ya fijado en el espíritu y cuya comodidad será muy apreciada.

b) Los teoremas de aritmética que parecen casi evidentes a priori pueden ser expuestos con números bastante grandes; sin suprimir así su carácter real, se hace por lo menos sentir la utilidad de una especie de verificación. Por ejemplo: *Todo número que divide un producto de dos factores y que es primo con uno de ellos divide al otro.* Si razonamos sobre el producto $60 = 12 \times 5$, que es divisible por 4, se tratará de demostrar que 4, primo con 5, divide a 12. En lugar de hacer los razonamientos claros, parecerá quitarles toda oportunidad. Hagamos multiplicar, al contrario, 1953 por 25 y comprobemos por el cálculo que el producto 48825 es divisible por 93. Tenemos así todos los elementos de la hipótesis y nos proponemos hacer ver, sin efectuar la división, que 93, que es primo con 25, divide 1953.

Utilizamos desde luego la parte de la hipótesis que esti-

pula que 93 y 25 son primos entre sí y escribimos los cálculos que conducen a su máximo común divisor. Los razonamientos se continúan entonces por la consideración de los dos productos 1953×93 y 1953×25 de los cuales 93 será el máximo común divisor.

La demostración abstracta ya no será más que la repetición de los mismos argumentos aplicados al producto $P = A \times B$ divisible por N, en la hipótesis de que N es primo con B, etc...

Pasemos ahora revista a algunas teorías algebraicas que merecen fijar especialmente la atención de los profesores, del punto de vista del método.

a) Un poderoso auxiliar en el estudio del álgebra es la *representación gráfica* de las diversas funciones simples sobre las cuales se razona en los elementos, lo mismo en la sección greco-latina que en la sección científica.

Desde el momento que las propiedades de las paralelas hayan sido estudiadas, así como los casos de igualdad de los triángulos, será posible demostrar, con un rigor suficiente, que la función $y = ax + b$, en coordenadas cartesianas, está representada por una recta. Por medio de numerosos casos particulares numéricos se allanará el camino y, gracias a las nociones ya familiares de la resolución gráfica de los problemas, se llegará rápidamente a figurar toda función $y = ax + b$, cualesquiera que sean los valores positivos o negativos de a y b. Los resultados serán condensados bajo forma de reglas en los que los roles respectivos de los números a y b serán puestos en evidencia. Los puntos donde la recta corta los ejes serán especialmente señalados. Para el trazado de la recta se preferirán dos puntos del plano bastante distantes y de coordenadas enteras, siendo posible. La función

$$by + ax + c = o$$

se reduce a la forma precedente, y la resolución de un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas se obtendrá

por la intersección de dos rectas. Volviendo a considerar los problemas examinados anteriormente se hará ver que las soluciones gráficas empleadas pueden ser justificadas inmediatamente por los principios generales cuyo estudio se acaba de hacer.

La discusión general de un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas (de primer grado), cuando ha sido preparada por los trazados gráficos, parecerá mucho más comprensible.

El estudio gráfico de la función

$$y = ax^2 + bx + c \ (a > o < 0)$$

puede hacerse sumariamente en 5.º año de las humanidades antiguas y en 4.º de las humanidades modernas, y, con más detalles, en 5.º año de la sección científica. Las variaciones de signo del trinomio y las desigualdades

$$ax^2 + bx + c > 0, \quad ax^2 + bx + c < 0$$

se relacionan muy bien con aquel estudio gráfico.

La resolución de la ecuación

$$ax^2 + bx + c = 0$$

ya no viene a ser otra cosa que encontrar los puntos del eje de las x por donde pasa una parábola.

Otras funciones, tales como

$$y = \frac{1}{x}, \ y = \frac{a}{x+b}, \ y = a + \frac{5}{x+c},$$

etc., que están representadas por hipérbolas, servirán para fijar la noción de asíntota.

b) En el estudio de los máximos y mínimos, en la sección greco-latina, habrá que limitarse a tratar las cuestiones que pueden resolverse por los principios ele-

mentales: un producto de dos factores cuya suma es constante, es máximo cuando los factores son iguales, o, si no puede realizarse la igualdad de los dos factores, cuando los factores difieren tan poco como sea posible. La regla correspondiente para el mínimo y sus principales corolarios, serán establecidos también por la identidad

$$(x+y)^2 = (x-y)^2 + 4xy,$$

u otras equivalentes.

El estudio de las derivadas dará, en la sección científica, un método más uniforme y más poderoso para resolver las cuestiones de máximos y mínimos.

Vamos a decir todavía algunas palabras sobre la trigonometría, la geometría analítica y el cálculo infinitesimal.

En la sección greco-latina, sólo debe enseñarse en vista de sus aplicaciones prácticas a las ciencias. La resolución de los triángulos rectángulos y los casos generales de los triángulos no rectángulos forman el objeto del curso, y los problemas propuestos como deberes deben ofrecer un carácter netamente práctico; los datos deben resultar, en lo posible, de observaciones directas hechas por los alumnos mismos. El uso de las tablas de logaritmos no debe ser un obstáculo para el empleo de las líneas trigonométricas naturales, y las figuras construídas exactamente a la escala indicada servirán a menudo como verificación.

En la sección científica, después de un estudio preliminar en el cual las principales fórmulas han sido demostradas para arcos positivos inferiores a 180°, será conveniente dar en 6.° año, en lugar de un puro y simple repaso de ese curso elemental, la generalización de los resultados partiendo de la teoría de los vectores. El seno y el coseno juegan entonces un rol preponderante y la demostración del principio de las proyecciones hecha para un contorno cerrado, se deducen fácilmente la mayor parte de las fórmulas útiles. Estas últimas tienen entonces un carácter de generalidad y de rigor difícil de alcanzar por

las definiciones más elementales de las líneas trigonométricas.

La resolución de las ecuaciones trigonométricas debe siempre completarse por la discusión y la construcción gráfica de los ángulos buscados.

En *trigonometría esférica*, expondremos paralelamente desde luego las demostraciones geométricas, después las analíticas. Conviene que se hagan frecuentes repasos de todas las fórmulas encontradas y no desdeñar las indicaciones mnemónicas que ayudan a retenerlas. Como síntesis ingeniosa, al mismo tiempo que como excelente ejercicio, todas las propiedades de los triángulos esféricos podrán ser reducidas a las de ciertos triángulos rectilíneos (triángulo de los elementos y triángulo derivado), según el método de Cesaro.

La *geometría analítica*, que los profesores quisieran enseñar en la sección greco-latina, debería en ella tener un carácter completamente diferente que en la sección científica. A la teoría de la línea recta, tal como había sido vista en 5.º año a propósito de la ecuación

$$y = ax + b$$

y del sistema de dos ecuaciones de primer grado con dos incógnitas, bastará agregar, en 6.º año, algunas nociones complementarias sobre el ángulo que una recta forma con los ejes, o con otra recta dada, así como el estudio sumario de la circunferencia y de la parábola

$$y = ax^2 + bx + c$$

(con ocasión de la resolución de la ecuación de segundo grado).

En retórica greco - latina, se colocará la construcción y algunas propiedades de las secciones cónicas; el trazado de la cisoide, lemniscata, espirales, etc.; pero siempre partiendo de la ecuación de coeficientes numéricos.

Con motivo de esos trazados serían expuestas las nociones elementales del cálculo infinitesimal. La noción de derivada, introducida a propósito de la tangente en un punto dado de una curva, se extendería a otros dominios: velocidad, aceleración, etc.

La convexidad, la concavidad, los puntos de inflexión, los puntos de intersección y otras particularidades serán expuestos de modo de hacer bien resaltar su importancia para la precisión de las curvas tomadas como ejemplo.

Cuando el manejo de las derivadas, y la comodidad de su empleo, se hayan adquirido bien por las aplicaciones gráficas, se pasará a problemas de máximos y mínimos.

En fin, la investigación de las funciones primitivas, a partir de las derivadas, se mostraría indispensable para valorar algunas superficies o volúmenes en los casos más simples.

Se trata sobre todo de hacer que sean familiares las notaciones del cálculo diferencial e integral para que los futuros estudiantes de ciencias se sientan todavía en país conocido cuando, en sus cursos universitarios de física, de química, de mineralogía, de cristalografía, etc., encuentren

$$\Delta x\,,\ dx\,,\ \frac{dy}{dx}\,,\ \int_a^b y\ dx\,,\ etc...$$

En la sección científica, el curso de geometría analítica debe darse con otro espíritu, sobre todo si se quiere llegar con la extensión propuesta. Se expondrá con mucho cuidado las teorías generales de las curvas de segundo grado, reservando para los trabajos personales de los alumnos, las propiedades particulares de cada género. La ecuación de la tangente será en cada caso particular, deducida de la fórmula general por el empleo de las derivadas.

Los cálculos por los cuales se llega a encontrar la tangente en un punto de un círculo o de una curva de

segundo grado, son interesantes, pero siendo precioso el tiempo, habrá que pasarlos en silencio; a lo más se podrá hacer utilizar ese procedimiento indirecto para algunas ecuaciones numéricas simples.

Se insistirá igualmente sobre las formas especiales de las ecuaciones cuando las cónicas verifican ciertas condiciones: ecuación focal, ecuaciones de las cónicas que pasan por tres o cuatro puntos, que son tangentes a rectas dadas, cuyos ejes o las asíntotas tienen direcciones determinadas, etc.

Las consideraciones de geometría sintética son con frecuencia de gran auxilio para llegar rápidamente a la solución de cuestiones de aplicación, y para evitar las complicaciones del aparato algebraico puro.

Para las ecuaciones del plano y de las rectas del espacio, habrá que limitarse a las nociones esenciales; lo mismo para la teoría de las cuádricas, para las cuales se podrá sólo tratar las ecuaciones reducidas a sus formas simplificadas.

La construcción general de las curvas algebraicas y trascendentes suministrará la ocasión de aplicar sin cesar las nociones del cálculo infinitesimal. Algunas curvas bien elegidas y problemas sobre las superficies y los volúmenes permitirán introducir progresivamente el cálculo de las integrales definidas.

Numerosos ejercicios de todas clases conducirán así a los alumnos de 7.º año de la Sección Científica a encontrarse, en lo referente al cálculo infinitesimal, al principio de sus estudios universitarios, en la situación en que se encuentran los alumnos de las escuelas primarias, respecto de la aritmética, cuando ingresan en el ateneo.

Terminamos por la geometría euclídea, porque esta rama de las matemáticas elementales es la que tienen en vista principalmente los profesores que quisieran introducir en la enseñanza media un curso de iniciación análogo al de que se ha hecho propagandista Mr. Laisant para la primera edad, de 4 a 12 años.

Sería, pues, solamente en 1.er año, que se podría continuar esta preparación en los ateneos, si se tiene en cuenta la edad de los alumnos.

Por otra parte, la iniciación tal como la preconiza Mr. Laisant es tanto más eficaz cuanto ella se dirige a grupos menos numerosos de alumnos; en nuestras clases quizá diera un resultado poco satisfactorio.

Pero, dejando de lado este inconveniente, y consideremos más bien la idea fundamental del sistema, que es la exclusión de toda regla y de todo procedimiento que deba aprenderse de memoria. «No hagais estudiar de memoria a los niños», dice Laisant en el prólogo de su *Iniciación matemática.*

Será bastante difícil conformarse a ese precepto, admitiendo que esto sea posible. Además, la continuación del libro demuestra que no hay que tomar la prohibición al pie de la letra: a pesar de todo, el niño sabrá de memoria muchas cosas: la tabla de Pitágoras, los procedimientos de sumar, de restar, etc.

Las habrá aprendido de otro modo y de una manera más fructuosa, es verdad; sin embargo, los métodos didácticos modernos no dejan de obtener menos seguramente los mismos resultados, pues son cada vez más raros los profesores que quieren inculcar conocimientos por simples enunciados de su contenido, repetido gran número de veces.

En los ateneos, nada se opone a que nociones bien comprendidas, y que se hayan hecho bien vivaces por la observación y la aplicación práctica, sean resumidas y retenidas bajo forma de reglas bien correctas y bien precisas, cuyos términos pertenezcan al vocabulario, propio o adquirido, del joven alumno. Poco a poco esas nociones confiadas a la memoria pasan a lo subconsciente y pierden así todo valor para la cultura del juicio. Es así, efectivamente: ¿sería para nosotros embarazoso encontrar inmediatamente después de aquéllas una nueva serie de otras nociones no menos útiles, no menos importantes sobre las cuales el espíritu podrá ejercitarse con éxito?

Y después, ¿no están los repasos para impedir que esas nociones completamente asimiladas lleguen a ser inactivas o muertas, sobre todo si esos repasos no se confunden con recitaciones mecánicas y se hacen bajo forma de aplicaciones en que la memoria de los hechos matemáticos se revela como elemento indispensable al éxito de las investigaciones?

La necesidad de saber de memoria los enunciados, las reglas y todas las nociones previamente aclaradas, no implica la obligación de una misma fórmula estereotipada, impuesta, por el profesor o por el texto. Debe dejarse a los alumnos cierta latitud, con tal que permanezcan exactos los hechos y sea correcta la expresión gramatical. Si, después de ensayos más o menos felices, los alumnos observan que los enunciados de un texto son más precisos, más concisos, o más elegantes que los que ellos han ensayado sustituir, fácilmente tratarán de servirse de aquellos con preferencia de otros análogos. En el fondo, en este caso, no habrá ningún inconveniente en que ellos adopten definitivamente lo que han ensayado y encontrado excelente.

Cultivemos, pues, la memoria, no la abandonemos a sí misma; que a cada hecho exacto, a cada idea clara de nuestro bagage intelectual corresponda también una expresión adecuada, que nos sea personal si es posible, pero, que, ante todo, sea precisa y justa.

Contrariamente a lo que por largo tiempo se ha admitido, la memoria, considerada como facultad receptiva, no se refuerza por el ejercicio. Pero, nuestro fin no es mejorar la memoria de los alumnos, sino obtener el mejor partido de la que les ha tocado en suerte, para extender el círculo, de sus ideas claras, para enriquecer el substratum indispensable a la manifestación de su juicio.

Parece, pues, que este desdén sistemático de recurrir a la memoria, no fuera sostenible tratándose de la enseñanza secundaria.

Sin embargo, existe gran ventaja en inspirarse en

otros principios que se aplican en la *Iniciación matemática:* hacer surgir la idea general de un conjunto de comprobaciones particulares, habituar a observar y a razonar antes de establecer conclusiones, presentar a las jóvenes inteligencias cuestiones concretas, interesantes, recreativas. Ved, sin duda, preceptos muy recomendables; ¿pero la actividad de los alumnos de los ateneos y de los colegios debe ser confirmada en el campo de esa especie de empirismo? Nos parece que no. Mr. Laisant prevé, por otra parte, que la iniciación estricta debe sustituirse por otros métodos para alumnos de 11 a 12 años.

En el discurso final del citado libro, se expresa como sigue dirigiéndose a los alumnos de esa edad. « De ahora « en adelante, ya no se trata de juegos, sino de estudios. « Debéis sujetaros a esfuerzos intelectuales, quizá tam- « bién a algunos esfuerzos de memoria: serán tanto más « atenuados cuanto que hasta aquí vuestras fuerzas han « sido economizadas ».

Agregaremos, pues, desde el 1.er año algunas abstracciones bajo forma de demostraciones y de reglas de aritmética. La dosis de generalización será mínima, pero aumentará gradualmente en las clases siguientes y, a partir del cuarto año, cuando la enseñanza se dirige a jóvenes de 15 años, el carácter abstracto primará sobre las consideraciones concretas, sin que éstas sean jamás descuidadas.

Hasta en retórica, cada vez que se presentan nuevas nociones, o que los esfuerzos puramente lógicos parezcan demasiado laboriosos a muchos alumnos, habrá que hacer una vuelta á lo particular y a lo concreto.

Muchos de nuestros estudiantes no tienen necesidad de las representaciones de los sólidos, sea de cartón, sea de alambre, para comprender las construcciones necesarias para la demostración de los teoremas de geometría del espacio; sin embargo, el empleo momentáneo de modelos de alambre, poliedros regulares, triedros simétricos, conos, etc., nunca perjudicará a esos alumnos

inteligentes, mientras que será de gran auxilio para muchos otros. Sin valor demostrativo por si mismas, esas nociones forman o despiertan los elementos fundamentales de todas las ciencias matemáticas.

Quien presentara sin la debida preparación las teorías modernas o la crítica de los principios irreductibles a jóvenes espíritus arriesgaría mucho no ser comprendido. Pero la teoría de las formas, la de los números complejos, la exposición de la geometría de Lobatchezky, etc., penetrarán fácilmente en la inteligencia de un alumno que haya asimilado la aritmética, el álgebra, la geometría elemental.

Por otra parte, es la vía seguida por el desarrollo mismo de las ciencias exactas a través de los numerosos siglos de su existencia, durante los cuales, privilegio casi único, ella sólo ha conocido algunos períodos de estancamiento, nunca de regresión.

El estudio del desarrollo continuo parece deber ser la base más sólida y la mejor garantía del éxito de toda reforma importante de los programas y de los métodos. La imitación consciente y sistemática de la grandiosa evolución justifica la eliminación de lo que ha dejado de ser indispensable: ella impone un asiento periódico de todo el substractum de la enseñanza, ella hace llevar a grados inferiores los conceptos que, antes, han dominado la ciencia, pero que desde hace mucho tiempo fueron sobrepasados.

La rapidez y aún la posibilidad de nuevos progresos son problemáticos sin tales sacrificios. Es rejuveneciéndose por eliminación y asiento que mejor respondería a las aspiraciones actuales de los que tienen a su cargo la instrucción secundaria de Bélgica.

La potente impulsión, consecuencia probable de la realización de esas tendencias renovadoras, no puede dejar de ser saludable a la influencia de las matemáticas sobre el espíritu y el carácter de nuestros alumnos así como sobre su suerte futura. Pero, para esto es preciso que

los métodos activos sean debidamente tenidos en cuenta en nuestras clases, que las diversas ramas científicas se aproximen para prestarse mutuo apoyo, y que la serie de nuestras deducciones rigurosas y abstractas conserven como fuente y punto de partida la intuición y la observación concretas.

España

I

EL MOVIMIENTO DE REFORMA DE 1901

La actual organización de la enseñanza secundaria en España data de 1901, en que fueron sustituídos los *Institutos* de *Segunda Enseñanza* por los *Institutos Generales* y *Técnicos:* cada una de las 49 provincias tiene su *Instituto,* y en él pueden cursarse los estudios generales de bachiller, y los estudios de aplicación profesional, de acuerdo con la siguiente división:

1.º Estudios generales para la obtención del grado de Bachiller en Artes;
2.º Estudios elementales y superiores para el magisterio de la primera enseñanza;
3.º Estudios elementales de agricultura;
4.º Estudios elementales de industrias;
5.º Estudios elementales de comercio;
6.º Estudios elementales de bellas artes;
7.º Enseñanza nocturna para obreros.

Ese plan de organización, tiene, en su tendencia de aplicación, bastante semejanza con los que rijen en las escuelas elementales superiores francesas, en las escuelas medias belgas, y en las escuelas e institutos técnicos italianos: la nueva organización de los institutos españoles responde a las necesidades actuales de la cultura popular, útil para la vida práctica, y ofrece a la juventud vías más provechosas, más útiles al progreso nacional, que las tan trilladas del bachillerato, primer escalón del proletariado intelectual, cuyos efectos perjudiciales se han sentido y se sienten más en España que en cualquier otro país europeo.

En España, lo mismo que en la casi totalidad de los países latino-americanos, la enseñanza secundaria no llena sus fines primordiales, debido a los malos métodos que emplea, a la deficiente preparación pedagógica de gran parte de su profesorado, al abuso de la enseñanza libresca, y a otros factores, entre los cuales debe figurar en primera línea el económico.

Y no es que España haya quedado fuera del gran movimiento que a principio de este siglo se inició en casi todos los países europeos; y lo prueba la reforma que en 1901 se hizo en los planes de estudios de los establecimientos de segunda enseñanza. El puesto de honor en el movimiento en pro de la cultura popular española corresponde a la muy meritoria Universidad de Oviedo: un grupo selecto y entusiasta de sus profesores emprendió una patriótica y activa propaganda, por medio de conferencias y de cursos de extensión universitaria, a fin de poner en conocimiento del profesorado y de las cla ses populares de España una serie de cuestiones relacio nadas con las necesidades de la enseñanza y la mejora de la cultura general. Esa acción cultural de la Universidad de Oviedo, tuvo gran resonancia en España, despertó una gran emulación en los intelectuales, y tuvo repercusión en diversos centros universitarios, científicos y literarios de aquel país.

En los Anales de la Universidad de Oviedo, que se publican desde 1902, aparecen los trabajos de los profeseres que han emprendido la honrosa misión de despertar en España el interés por las cuestiones de más actualidad y de más importancia para la cultura nacional: los temas tratados y la gran autoridad de algunos de sus autores, son de mucho valor para todas aquellas personas que se interesan por los progresos de la educación popular, especialmente para los países latino-americanos, cuyos defectos de educación en gran parte son heredados de la madre patria.

Además, diversas instituciones de enseñanza de España,

y el propio Gobierno, en los últimos años, han establecido misiones de estudio a los países extranjeros, con el fin de conocer los progresos alcanzados y de difundir e implantar los mejores métodos en uso en los diversos grados de la enseñanza pública.

Sobre el tema que estoy tratando, enseñanza de las matemáticas elementales, voy a transcribir lo que a ella se refiere de un interesante informe, resultado de una de esas misiones, confiada a uno de los más competentes profesores técnicos de España, don Luis Gaztelú, actualmente director de la Escuela de Ingenieros de caminos, canales y puertos de Madrid [1]. De ese informe sólo tomaré los pocos capítulos que se refieren al estudio de las matemáticas en las escuelas secundarias: las ideas del autor, en su parte fundamental, están de completo acuerdo con los principios que rigen la moderna enseñanza matemática.

Llamo la atención sobre el informe del señor Gaztelú, en el cual encontrarán los profesores observaciones muy atinadas tendientes a corregir defectos de la enseñanza matemática en España: son los mismos defectos que existen en nuestra enseñanza secundaria, y que no se corrigen con sólo modificar los programas y los textos.

De las informaciones que van publicadas y de las que aparecerán en este mismo volumen, así como del ilustrativo informe del señor Gaztelú, resulta que el punto fundamental de la reforma de la enseñanza matemática es el método con que debe desarrollarse.

(1) La enseñanza matemática en las escuelas técnicas de Inglaterra, por don Luis Gaztelú, marqués de Echandía, profesor de la Escuela de Ingenieros de Caminos de Madrid (1913).

II (1)

PRINCIPIOS DE LA MODERNA PEDAGOGÍA MATEMÁTICA

Objeto de la enseñanza

La crítica de los procedimientos clásicos empleados tradicionalmente en la enseñanza de las matemáticas ha conducido, en estos últimos años, a condenarlos con rara unanimidad, como inadecuados al fin principal a que se deben encaminar estos estudios.

En vez de limitarse, como hasta ahora, a proporcionar al alumno un caudal determinado de conocimientos, se aspira a un fin más amplio y más elevado: a que cada individuo se forje, por sí mismo, los instrumentos necesarios para la investigación personal, acometiendo la empresa en su origen, desde el momento mismo en que el niño comienza a escribir los números y a ejecutar las primeras operaciones de la Aritmética; y esto con el fin de que no adquiera vicios que luego es muy difícil desarraigar. Bien se ve que dentro de este objetivo está comprendido el de adquirir y conservar los conocimientos necesarios.

Laisant, en su precioso libro intitulado *La Mathématique, Philosophie-Enseignement*, que deberían leer y consultar con frecuencia todos los Profesores de matemáticas, refiriéndose a la enseñanza elemental en Francia, condensa en una frase gráfica y feliz el defecto fundamental de que adolece, defecto que es común a esta clase de enseñanza en todos los tiempos y en todos los países, y el más directamente opuesto al fin que debe asignársele, de preparar al alumno para la investigación personal. *Tout attendre de la mémoire et presque rien de l'intelligence.* Esperarlo todo de la memoria y casi nada del entendimiento.

(1) Lo que sigue es extractado del mencionado informe del señor Gaztelú.

Muchos pedagogos modernos, entre ellos el eminente Poincaré, se han valido de un símil muy oportuno para explicar el verdadero objeto de la enseñanza matemática.

El que lee un texto de matemáticas u oye una explicación y entiende lo que oye o lo que lee, se asemeja a un espectador de una partida de ajedrez que conoce la marcha de las piezas, observa que los movimientos se realizan conforme a las reglas y que, finalmente, gana uno de los jugadores. El espectador habrá dado un paso muy importante cuando llegue a ver por qué se prefiere una jugada a otra posible, y la analogía con el estudio de las matemáticas es obvia. Mas para disfrutar plenamente del placer del juego, es indispensable que el espectador se convierta en jugador. Observar el juego de otros y analizar los motivos de sus jugadas es preparación imprescindible, pero no basta para aprender a jugar bien. Es preciso practicar el juego desde el momento en que se conoce la marcha de las piezas, y este ejercicio es el que provoca la necesidad de estudiar la teoría. Sería tarea desesperante la de pretender enseñar a jugar bien al ajedrez obligando al discípulo a que se limitase a observar el juego ajeno, sin permitirle jugar nunca.

Los textos y las enseñanzas del Profesor deben concretarse a guiar al discípulo en su trabajo. La aspiración constante debe ser el trabajo original, y siempre que el estudiante saca consecuencias por sí mismo, hace realmente una obra original. Sin una labor de este género, el estudio de las cuestiones matemáticas es casi inútil para la cultura. En este trabajo se requiere ante todo la corrección y la certeza, y nunca se debe apremiar al alumno, porque lo que se pretende es que lo ejecute bien y no que lo haga pronto.

Algunos alumnos tratan de eludir esta parte del trabajo, que es precisamente la que más les beneficia, aprendiendo de memoria los resultados de la labor ajena. Esta tentación es grande en algunos alumnos, y quizá no hay materia más árida ni más repulsiva que las matemáticas

estudiadas así. Diez páginas de matemáticas bien entendidas valen más que ciento aprendidas de memoria, y una página trabajada independientemente por el alumno vale más que diez entendidas con claridad pero mediante un trabajo puramente pasivo. [1]

Las mismas ideas dominan en Francia y en Alemania, como tendremos ocasiones de ver en lo sucesivo. He aquí un párrafo de un documento oficial, relativo a la enseñanza matemática de las escuelas de segunda enseñanza en Alemania:

« La tarea más importante de la instrucción matemática consiste en el ejercicio mental que dispone al alumno para aplicar correctamente, en su trabajo personal e independiente, las intuiciones y los conocimientos que ha adquirido. En todos los dominios de esta disciplina, el objetivo debe consistir en alcanzar la inteligencia clara de los teoremas que han de ser desarrollados y de su deducción, así como la práctica y destreza en su aplicación ».

Métodos de enseñanza

Los principales métodos empleados en la enseñanza de las matemáticas, prescindiendo de los métodos deductivo e inductivo, que todos conocen, pueden deducirse al *socrático*, el *eurístico*, el de *recitación*, el de *explicación* y el moderno llamado *genético* [2]. Un buen Profesor nunca emplea uno sólo con exclusión de todos los demás.

El método *socrático* consiste en dirigir al discípulo una serie de preguntas a las que éste contesta por simples afirmaciones o negaciones, conduciéndole con habilidad a prestar su asentimiento a la verdad que se le quiere inculcar. En toda su pureza, es de difícil aplicación y se usa rara vez.

---

(1) *The Teaching of Mathematics in the Elementary and the Secondary School,* J W. A. Young, 1911.

(2) Al método llamado en América «Método de laboratorio», que no es otra cosa que la Escuela pedagógica del Profesor Perry, le dedicamos un capítulo especial.

El método *eurístico* difiere del anterior en que las preguntas están dispuestas de tal modo que por ellas se provoca una serie de invenciones o descubrimientos parciales del discípulo, que le conducen insensiblemente a la verdad que se le quiere demostrar. Ya se ve que este método se conforma muy bien con las ideas que se han expuesto respecto al fin de la enseñanza, y es, con justicia, muy recomendado.

Todo el que ha hecho algún trabajo de investigación personal sabe, por propia experiencia, cuánto más fácilmente se retienen y asimilan y cuánto más sólidos son los conocimientos así adquiridos que los que proceden de estudios en los libros o de explicaciones oídas, aunque estos estudios se hayan hecho bien.

Este procedimiento es muy usado: todos los buenos Profesores se encaminan hacia él instintivamente. En nuestra Escuela existen las clases de Proyectos, que, siendo por su naturaleza de investigación personal, exigen necesariamente la aplicación del método eurístico. Si el Profesor contestase categóricamente a las preguntas que le dirige el alumno, éste haría muchas veces el proyecto al dictado, desempeñando el papel de un mero delineante o escribiente, en vez de ejercitarse en el de Ingeniero. El Profesor debe limitarse a guiarle y orientarle, dejándole libertad en sus iniciativas, y proporcionándole los datos necesarios para que realice por si mismo las investigaciones parciales que le sean necesarias, fingiendo, a veces, informaciones hipotéticas que luego explicará y razonará en la Memoria.

Muchas veces, cuando yo desempeñaba estas clases, me han dirigido los alumnos preguntas semejantes a estas: ¿Qué materiales adoptaré para este edificio? ¿Por cuál de las laderas de este valle *quiere usted* que lleve el trazado? A estas preguntas se debe contestar provocando una nueva investigación. La solución a la primera podría ser fijar la localidad en que se ha de ejecutar el proyecto, encargando al alumno que se informe respecto a los ma-

teriales usuales y sus precios. Al segundo se le podía responder que debía hacer un breve estudio comparativo para elegir con acierto la ladera; en una palabra, se le debe sugerir una dirección *practicable*, pero nunca darle una contestación categórica. Es conveniente convencer al alumno de que estas contestaciones evasivas no implican descortesía, ni propósito de imponerle un trabajo inútil, ni ignorancia por parte del Profesor. Son simplemente la recta aplicación del método eurístico, tan justamente recomendado por los pedagogos modernos.

Es también muy común la aplicación de este método en las clases orales, y en general, siempre que se establece un diálogo entre el Profesor y el discípulo, tratando el primero de evitar que degenere en el reprochable método de la recitación de memoria. Estos diálogos, bien dirigidos, interesan vivamente a toda la clase y no aprovechan sólo al interlocutor, como algunos creen. En mi opinión, para conseguir este resultado, debe oirse más frecuentemente la voz del Profesor que la del alumno, pero evitando, sin embargo, caer, sin necesidad, en el extremo opuesto, que es el método de explicación. A éste habrá de acudir el Profesor cuando crea conveniente comunicar alguna noticia nueva o dar algún desarrollo fuera del alcance de las facultades inventivas del alumno, aun guiado por el Profesor.

Al tratar del método de *recitación,* dejo la palabra al Profesar americano J. W. A. Young. Aunque creo que si hubiera escrito yo acerca de ésto sin haber leído a este autor, hubiera expresado casi los mismos conceptos, prefiero citarlo textualmente para que mis opiniones vayan reforzadas con la autoridad de un pedagogo tan ilustre y experimentado:

« En el método de *recitación* (este autor le llama *modo de examen, examination mode),* el Profesor señala alguna tarea al alumno, generalmente algún trozo de un libro de texto que aquél debe aprender (más o menos de memoria) o algunos problemas que debe resolver. El tiempo

de la clase se invierte en un verdadero examen de los alumnos por el Profesor, el cual averigua por medio de diversas pruebas si los alumnos han hecho o no el trabajo señalado. En su forma cruda y sin atenuaciones, el Profesor queda reducido a poco más que una máquina. No proporciona más ayuda, estímulo o inspiración a sus alumnos que el reloj que advierte al obrero la hora del trabajo o la balanza que pesa la obra que ha ejecutado. Es fácil imaginar una especie de fonógrafo que podría desempeñar igualmente bien la tarea de tal Profesor, permaneciendo callado mientras se le pronunciasen las palabras textuales de un libro determinado y dijera: «¡Mal! El siguiente» en el momento en que el alumno tropezase. Es difícil pensar que se pueda decir algo en favor de este método, felizmente abandonado.

Reidt [1] describe uno de estos casos como sigue:

«Se señalaba un teorema. Los alumnos debían recitarlo sucesivamente al pie de la letra conforme a un libro. A los que lo conseguían, se les señalaba el teorema siguiente para que lo aprendiesen en el libro. Los que no sabían el primer teorema continuaban estudiándolo. Así, al poco tiempo cada alumno estudiaba un teorema distinto. Los ejercicios se ordenaban del modo siguiente: Al entrar en clase, el Maestro hacía una señal al primer alumno para que dijera su teorema, luego al segundo y así sucesivamente. Por medio de una señal convenida, a los alumnos que habían sabido su teorema se les señalaba el siguiente para la próxima lección, y por medio de otra señal recibían los demás la orden de repasar el suyo. El Profesor se jactaba de que, por este procedimiento, daba su clase sin pronunciar una sola palabra».

Dice Young que no cree que pueda encontrarse en ninguna parte un caso llevado a este extremo, pero es muy cierto que aún se conservan métodos que exigen un empleo abusivo de la memoria.

---

(1) *Math. Unterricht*, pág. 29

Estos Profesores me recuerdan el caso de algunas madres que *toman* a sus hijos las lecciones de latín o de psicología. En punto a severidad, suelen ser tan inexorables como el fonógrafo del doctor Young, y dejan muy atrás a los Profesores de *peor reputación* de nuestras Escuelas especiales. Por fortuna para las Matemáticas, los *sen* α, *cos* φ, *cotg* Θ y otros símbolos aún más complicados hacen muy difícil, si no del todo imposible, este método casero de enseñanza.

Existe un método de *recitación* atenuado, en el cual se sigue un texto que los alumnos aprenden, no ya de memoria, sino *de concepto*. Este método no deja de presentar en gran parte los inconvenientes del anterior, y es muy fácil caer insensiblemente en aquél, aun contra la voluntad del Profesor. No recita éste, pero es difícil que pueda evitar *siempre* que el alumno caiga en esta gravísima falta. Todos conocen el caso, muy repetido entre los principiantes, de alumnos que llevan, al parecer, de un modo admirable la demostración de un teorema, y una cita de una página y un número, que interrumpe inoportunamente el razonamiento, prueba que todo ello era una recitación literal. Aun cuando se estudie entendiendo bien, este método exige un abuso de la memoria, según el moderno concepto de la enseñanza.

Un alumno sobresaliente explica un teorema de Geometría, exponiendo con claridad la demostración, enunciando con precisión y en el orden debido todos sus corolarios, y hasta contesta acertadamente a las observaciones u objeciones del Profesor; en una palabra, se ha enterado perfectamente. Es muy cierto que, aun en este caso, ha hecho un uso de la memoria que no es necesario en la investigación personal, y que los partidarios de los modernos sistemas pedagógicos condenan muy lógicamente. Este alumno no ha pasado de espectador en el grado ínfimo de la partida de ajedrez que sirvió de comparación con los grados de aprovechamiento en los estudios matemáticos. Y esto es consecuencia del método, que es defectuoso.

¿Cómo se enseñará entonces la Geometría? He aquí la solución que dan los Profesores modernos, de acuerdo con sus principios. Al empezar el estudio, los únicos trabajos que puede hacer el alumno y que tengan el carácter de investigación personal, son ejercicios o problemas muy sencillos, en los cuales siempre hay algo de invención. Pero como le faltan materiales aún para eso, se le suministra un pequeño conjunto de verdades, que se le exponen en forma axiomática, con lenguaje claro y sencillo, y aun algunas con pruebas groseras, sin ninguna pretensión de rigor, como las de la Geometría experimental, de las que más adelante se citarán ejemplos. Con estos elementos puede adelantar bastante en la Geometría práctica, y de ello se verán las pruebas más adelante. Sólo entonces deberá empezar la Geometría demostrada, y este estudio lo deberá hacer también inventando sus demostraciones con la ayuda del Profesor, que aplicará el método eurístico, y así se irá formando un cuerpo de doctrina creado por sí mismo y asimilado sin ningún esfuerzo de la memoria. El estudio de las demostraciones en este sistema se hace como ejercicio del arte de demostrar, sin preocupación ninguna de que aquéllo se pueda olvidar. No se podrá estudiar así toda la Geometría; pero el provecho obtenido en orden al desarrollo de la inteligencia es incomparablemente mayor, y lo que se ha estudiado de este modo queda definitivamente adquirido por el alumno, mientras que empleando el método de *recitación*, aun atenuado y rectamente interpretado, lo aprendido se olvida en cuanto pasan los exámenes.

Ejercicios numerosos, variados, bien graduados y elegidos, al principio; más tarde, el estudio de las demostraciones, sin pretender estudiarlas todas, ni en su orden lógico riguroso, combinado ésto con otros ejercicios de mayor dificultad. Tales son los trabajos de los alumnos en esta primera fase de sus estudios, trabajos que cumplen bien con la condición de ser investigaciones personales, y en los cuales interviene de un modo muy pre-

dominante la inteligencia, quedando la memoria relegada al lugar muy secundario que le corresponde.

El método de *explicación* es el que se emplea en las clases elevadas, y es el que conviene en las clases de adultos bien preparados, siempre que no se acumule un número excesivo de lecciones, porque, en tal caso, no se dejaría tiempo suficiente a los alumnos para el estudio y ejercicio de lo que se les va enseñando. Tratándose de la enseñanza elemental y con alumnos muy jóvenes, todos convienen en que no es recomendable este sistema. El doctor Young no parece muy convencido de sus excelencias, aun en el caso de las clases adelantadas.

Mi experiencia me ha demostrado que este método es excelente cuando se combina con los repasos y preguntas frecuentes de lo ya explicado (me refiero a la clase de puentes, que corresponde al cuarto año de la Escuela). Los alumnos adquieren ideas más claras que cuando estudian en un texto, sobre todo si se trata de uno de esos textos voluminosos y en lengua extranjera, sistema que debe proscribirse en absoluto por muchas razones. Pero es preciso que las explicaciones no se sucedan con excesiva frecuencia, por las razones ya indicadas, y porque, siendo tantas las lecciones que comprende un curso en nuestras escuelas, la aplicación continua de este sistema por todos los Profesores del mismo año daría lugar a acumular una cantidad de materia tal, que inevitablemente produciría la indigestión intelectual de los alumnos, aun de los más capaces. Llevado a este extremo, considero este método casi tan funesto para la enseñanza como el señalamiento de un texto para aprenderlo de memoria.

En Inglaterra es frecuente que el Profesor principal *(lecturer)* explique un corto número de conferencias por semana, y los demás días, los alumnos tienen tiempo señalado para trabajar sobre lo que aquél ha explicado, ya en el laboratorio, ya en otras clases, bajo la dirección de Profesores auxiliares que reciben diversos nom-

bres (*Assistant-Professor, Assistant-Lecturer, Demonstrator*, etcétera). Análogo papel desempeñan en Francia los llamados *repétiteur*. En España, el Profesor único ejerce por sí mismo todos estos cargos, y debe distribuir el tiempo atendiendo a todos aquellos trabajos, que son indispensables para que la enseñanza sea provechosa.

El *método genético* consiste en una verdadera imitación del sistema parlamentario. El Profesor dirige la discusión, los alumnos exponen sus opiniones, y el *Presidente* procura que de estas opiniones resulte la demostración que desea. Ignoro dónde y con qué resultados se ha aplicado este método; pero no parece muy apropiada la discusión parlamentaria para la investigación de las verdades matemáticas. No me atrevería a recomendar que se ensaye en España.

Libros de texto

Al condenar el abuso de los *libros de texto* en el método de recitación y en los que más o menos se acercan a él, no debe creerse que se proscribe el uso oportuno de esa clase de libros, que pueden prestar muy buenos servicios, y aun puede decirse que son absolutamente necesarios, sobre todo en la enseñanza elemental. El texto evita la necesidad de que los alumnos tomen apuntes durante la explicación, lo cual distrae su atención del objeto principal, y de ningún modo conviene a los principiantes. Aun en clases adelantadas, los apuntes resultan siempre con algunos claros que hay que suplir al repasarlos, y para ello habrá que acudir a los libros de texto; pero ya se ve que en ambos casos se utilizan más bien como libros de consulta. Lo que siempre hay que evitar es que el texto se considere como un libro que hay que aprender en toda su extensión, ciñéndose servilmente al mismo orden en la exposición y en la elección de las demostraciones. Son también muchas veces de absoluta necesidad las colecciones de ejercicios y problemas, por-

que en las clases numerosas, sobre todo, es imposible que el Profesor pueda componer por sí mismo el gran número de ejercicios que debe repartir entre sus alumnos, si ha de atender a las recomendaciones de los pedagogos modernos en su parte más esencial.

Intervención de la memoria

He insistido mucho, de acuerdo con los más eminentes maestros en esta materia, en la necesidad de limitar el uso de la memoria al papel muy secundario que le corresponde. Es muy cierto que cuando se ha obtenido un resultado por medio de razonamientos propios, y en consecuencia se ha llegado a ver con toda claridad, y después ha sido aplicado muchas veces en los ejercicios y problemas, ese resultado o proposición se graba profundamente en la memoria sin esfuerzo alguno.

Uno de los ejercicios más convenientes consiste en reducir al mínimo el número de fórmulas o proposiciones que es necesario retener en la memoria. Para explicar mi pensamiento me valdré de un ejemplo, tomándolo del estudio de la parte elemental de la Trigonometría, en el cual muchos principiantes ponen innecesariamente en tortura sus facultades retentivas, esforzándose en aprender de memoria muchas fórmulas, que llegan a convertirse casi en intuiciones cuando el estudiante ha hecho un gran número de ejercicios, único medio de dominar esta parte de las matemáticas tan importante, y que tanta resistencia suele oponer a los esfuerzos de los principiantes.

Empieza este estudio con las definiciones de las líneas trigonométricas, que se aprenden bien mediante una consideración atenta de su significación. De las relaciones entre las líneas trigonométricas de un arco, basta recordar estas dos:

$$\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1;$$

$$\operatorname{tang} x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x},$$

y esto se hace sin esfuerzo de memoria, con sólo imaginar la figura. Todas las demás se deducen inmediatamente, y basta el frecuente empleo que se hace de ellas para que se retengan algunas otras, también sin esfuerzo. Es costumbre aprender de memoria las cuatro fórmulas relativas a las sumas de dos arcos. En realidad, basta saber una de ellas, porque las otras tres se pueden escribir por sencillas sustituciones hechas mentalmente.

De éstas se deducen, a su vez, tan sencillamente las relativas a los arcos duplos que, para escribirlas, no hace falta esfuerzo alguno de memoria.

Las fórmulas logarítmicas de las sumas y diferencias de senos y cosenos son quizá las únicas de esta parte de la Trigonometría que exigen un esfuerzo de memoria, y es el único que se debería recomendar, porque son de uso frecuente, y el deducirlas mentalmente siempre que haga falta puede dar lugar a equivocaciones. Las fórmulas relativas a la resolución de los triángulos rectángulos se escriben sin intervención alguna de la memoria, pues no son otra cosa que las definiciones de las líneas trigonométricas, y para saber las necesarias para la resolución de los triángulos oblicuángulos, bastan tres o cuatro observaciones análogas a las que acabamos de exponer. A esto se reduce el empleo de la memoria cuando se estudia bien, es decir; a fuerza de resolver ejercicios.

Suelen decir que hace falta una memoria feliz para dominar la primera parte del Cálculo integral los que no lo han estudiado bien, que son los que no lo han practicado bastante, no me cansaré de repetirlo. Nada más inexacto que esta afirmación. Las fórmulas que verdaderamente hay necesidad de retener se reducen a media docena de integrales inmediatas, y esto se consigue sin ningún esfuerzo mediante su empleo, que es frecuentísimo. De las demás, casi puede afirmarse que más dependen de la práctica y de la inteligencia que de la memoria. Así, cuando un matemático, práctico en esta parte del Cálculo integral, escribe

$$\sqrt{a + bx + x^2} = z - x$$

con el fin de hacer desaparecer el radical y obtener una expresión racional de la variable z, no creo que pueda decirse con propiedad que hace uso de la memoria. Ve perfectamente cómo al elevar al cuadrado desaparecerá x^2, y cómo x y dx se podrán expresar en función racional de z; y su práctica le sugiere esta invención cuantas veces se le ofrezca la necesidad de aplicarla. Y lo mismo puede decirse de las demás transformaciones usuales.

Es muy cierto que, en cualquier clase de estudio la importancia del papel que desempeña la memoria disminuye a medida que se va avanzando. Y en los principios, será mejor aquel método de enseñanza y de estudio que menor fatiga imponga a la memoria.

Exámenes

Los *exámenes,* sobre todo los exámenes ante tribunales desconocidos, son ciertamente un gran obstáculo para que la enseñanza se dirija a su verdadero objeto, porque, cuando el resultado final depende de un examen, el Profesor y el alumno considerarán siempre como principal objetivo de la enseñanza la preparación para el examen, como es muy natural. Así resulta que el Profesor carece de libertad y de iniciativa para elegir las materias del curso que más convienen a los alumnos, se ve obligado a desarrollar un programa completo, casi siempre demasiado extenso, y que hace imposible el estudio lento y bien graduado, que es el único que puede producir resultados provechosos en la enseñanza; no ofrecen garantía cierta de una buena elección entre los candidatos, como lo acredita la experiencia de todos los tiempos y países, y presentan otros muchos inconvenientes, que no es necesario enumerar por ser muy conocidos.

Pero, con todo ésto, los exámenes son un mal necesaria e inevitable. Podrá cambiarse la forma, podrá cam-

biarse el nombre, pero su esencia, el hecho de que quien quiera acreditar que posee determinados conocimientos haya de exponerlos ante un jurado que se supone competente, sometiéndose al fallo que éste dicte, no es posible evitarlo. Los que pretenden encontrar este ideal pueden ser comparados con los ilusos que buscan todavía la cuadratura del círculo, la duplicación del cubo o el movimiento continuo.

Siendo, pues, un mal irremediable, debe tratarse de que sus consecuencias perniciosas se atenúen todo lo posible.

En primer lugar, se observará que son de absoluta necesidad los ejercicios escritos, que no son invención moderna, sino que han existido siempre en todas las escuelas extranjeras de universal reputación. Un examen oral en que sólo se exija la repetición de teorías y ejercicios preparados de antemano, es el instrumento más formidable para fomentar el estudio por el método de recitación de memoria. Ni el alumno ni el Profesor se preocuparán ciertamente, en este caso, de la resolución de otros muchos ejercicios, que son indispensables, como ya se ha visto. Su único objetivo será aprender bien el texto, y, sobre todo, en el repaso, o repasos, de los últimos días, se llegará al colmo del delirio en el abuso de la memoria, para que no se olvide alguna fórmula o algún artificio de una demostración en el acto del examen, dando lugar, muchas veces, a que el alumno se presente en un estado de verdadera incapacidad intelectual, que está muy lejos de ser habitual en él.

Si, por otra parte, se han de proponer ejercicios o problemas que no sean una aplicación literal de reglas o fórmulas conocidas, lo cual es indispensable para conocer el verdadero estado de instrucción del alumno, es evidente que no se puede elegir un medio más inconveniente que el de hacerle resolver problemas en la pizarra, ante los Profesores del Tribunal, cuyas miradas considera como apremiantes, y en el estado de ánimo más inadecuado para poder formular el más sencillo razonamiento.

El examen escrito suprime, al menos en parte, estos inconvenientes, sobre todo si se eligen bien los ejercicios y se concede al examinando tiempo muy sobrado para la resolución del problema propuesto. He insistido siempre en recomendar, predicando con el ejemplo, que estos ejercicios sean sencillos y no exijan largos desarrollos de cálculos, ni construcciones geométricas complicadas, que, muchas veces, a causa del estado de ánimo del alumno, pueden dar lugar a que cometa equivocaciones materiales que no prueban ignorancia, pero deslucen el trabajo, el cual quizá hubiera podido ser bien ejecutado con más tiempo y en condiciones de ánimo más favorables.

Durante muchos años he preparado los ejercicios de Cálculo integral que han sido propuestos en los exámenes de ingreso de la Escuela, y para su composición adopté algunas reglas que creo oportuno dar a conocer aquí.

En primer lugar, los ejercicios deben referirse a las teorías más importantes, y nunca a esas otras que figuran como apéndices, sin desarrollo ulterior, que mejor sería suprimir en todos los programas de ingreso. Aplicando esta regla al Cálculo integral, adoptaba, casi siempre, algún caso de determinación de volúmenes o áreas de superficies curvas [1]. Al plantear el ejercicio examinaba, la integral resultante para ver qué reglas elementales se le podían aplicar y desarrollaba completamente los cálculos, llevando cuenta del tiempo que invertía en ello. Cuando empleaba más de un cuarto de hora, desechaba el ejercicio y buscaba otro más sencillo, y luego se concedía a los alumnos tres cuartos de hora o una hora para su resolución. Además, concretaba el problema a la parte de Cálculo integral, para lo cual dibujaba en la pizarra, junto al enunciado, una figura lo más clara posible, y daba una explicación verbal sobre la naturaleza y posición de las diferentes superficies que limitaban el

---

(1) Véase *Revista de la Sociedad Matemática Española*, números 7, 8, 9 y 10.

sólido o el contorno trazado en la superficie curva, en una palabra, de todos los preliminares que corresponden a la Geometría analítica.

Estos ejercicios eran considerados como muy fáciles por los profesores de los Tribunales, por los de las Academias preparatorias y por los mismos aspirantes al ingreso, y, sin embargo, no todos los resolvían bien, ni mucho menos. El número de los que los resolvían de un modo completamente satisfactorio, obteniendo los verdaderos resultados, o cometiendo sólo ligeras equivocaciones materiales, perfectamente excusables, era siempre muy limitado.

Creo poder deducir de aquí que estos ejercicios de examen deben ser siempre sencillos, breves y relativos á las teorías más importantes del programa, aun en el caso en que se presenten muchos candidatos para pocas plazas. El temor de que un gran número de aspirantes resuelva a la perfección media docena de ejercicios sencillos, aunque se trate de ramas de las matemáticas menos elevadas que el Cálculo integral, es y será desgraciadamente pura ilusión, mientras no se mejoren los métodos de enseñanza.

La elección de ejercicios es de gran importancia y requiere una atención especial por parte de los Tribunales. Debe evitarse con sumo cuidado proponer problemas que estén fuera del alcance de la generalidad de los alumnos, porque el hecho de que nadie resuelva un ejercicio propuesto cede en desprestigio del Tribunal y difícilmente lo excusará el público. No se puede negar que revela muchas veces un error grave en la apreciación de la realidad, y da lugar a que se crea que no se ha prestado la debida atención a un asunto tan delicado y trascendental para el porvenir de los aspirantes.

En algunas escuelas de Inglaterra se da tanta importancia a la elección de los ejercicios de examen, que se invita con la debida anticipación a los Profesores a que propongan algunos, y el Director o una Comisión inde-

pendiente del Tribunal elige los que se han de utilizar en el examen. También es frecuente la práctica de proponer a los candidatos varios problemas, dejándoles la libertad de elegir entre ellos.

Podría citar numerosos textos de autores ingleses en apoyo de las opiniones que he emitido, pero me abstengo de ello por no cansar al lector.

Generalmente se completa el ejercicio escrito con un breve examen oral, en que se reconoce la instrucción del alumno en los puntos fundamentales de las teorías que comprende el programa. Considero necesario este examen, porque los conocimientos de que se trata no se prestan bien a ser desarrollados por escrito, si no se prolonga excesivamente el examen, y los ejercicios no bastan como garantía de que el alumno posee los conocimientos necesarios. En los exámenes de Cálculo infinitesimal para el ingreso se ha presentado con alguna frecuencia el caso de alumnos que resolvieron bien los ejercicios y luego revelaron, en el examen oral, una ignorancia absoluta de las nociones fundamentales.

Respecto al género de exámenes en que interviene principalmente el propio Profesor, semejantes a los de los cursos de la Escuela, hace Young las siguientes observaciones, que considero muy acertadas:

«Estos exámenes no deben ser considerados como un factor muy importante para juzgar el aprovechamiento del alumno. A éste se le debe convencer de que lo que importa, sobre todo, es la aplicación y la asiduidad durante el curso, de modo que, aunque se conceda alguna importancia al examen, nunca será tan grande que anule la del trabajo hecho en clase, ni será tampoco capaz de remediar los efectos de un abandono excesivo. Así se evita el miedo al examen en los alumnos aplicados, y se quita toda esperanza de remediar con un buen examen su desaplicación a los holgazanes. Nunca se debe considerar el examen como medio de averiguar el aprovechamiento y la labor ejecutada por el alumno. Esto lo debe conocer antes el Profesor.

« Entendido así el examen, sirve para motivar un repaso muy provechoso de todo lo estudiado durante el curso.

« Si se quiere considerar como prueba de suficiencia del alumno, ha de ser mirando a lo futuro, no a lo pasado.

« La prueba debe limitarse a averiguar la capacidad de aplicar los conocimientos adquiridos en los estudios ulteriores. Debe, pues, permitírsele llevar al examen los libros de texto, apuntes o libro de consultas que desee tener a mano. Esto quita todo temor de un fracaso por falta de memoria, y hace inútiles esos repasos inconvenientes de los días que preceden al examen.

« Los ejercicios propuestos no deben consistir en una mera repetición de lo expuesto en el curso, sino que deben tender a averiguar hasta qué punto sabe aplicarlo el alumno. »

Como se ve, muchas de estas prescripciones se practican ya de un modo corriente y forman parte de las costumbres académicas de nuestra Escuela.

III

LA ENSEÑANZA MATEMÁTICA ELEMENTAL EN ESPAÑA

La primera enseñanza

Los conocimientos matemáticos que se adquieren en la primera enseñanza no pasan generalmente de la ejecución más o menos premiosa de las primeras operaciones de la Aritmética. Y no puede menos de ser así, porque generalmente los niños abandonan prematuramente estos estudios, lo cual es muy perjudicial, sobre todo por haber tenido siempre en España la segunda enseñanza un carácter demasiado elevado, por la tendencia que se ha observado a adoptar en ella, desde los primeros años, procedimientos más adecuados a la enseñanza superior que a la educación de niños de tan corta edad.

No se crea de ningún modo que sea insignificante la

influencia de la instrucción primaria en los estudios de los futuros matemáticos, ingenieros, militares, etc., etc. A ella principalmente corresponde iniciar a los jóvenes en los hábitos de orden, limpieza y pulcritud en todos los trabajos que emprendan, y muy especialmente en los matemáticos, en los cuales tiene esto una gran importancia, mucho mayor de lo que algunos se figuran. Debieran ya los alumnos, desde esta primera época de sus estudios, acostumbrarse a coleccionar en cuadernos, puestos en limpio y claramente ordenados, todos los problemas de Aritmética y de nociones de Geometría que resuelvan. Si este trabajo no se ha podido terminar al pasar a la segunda enseñanza, en ella debe continuarse hasta que estos hábitos de orden lleguen a constituir, como suele decirse, una segunda naturaleza.

Más adelante se examinará este importante asunto con toda la atención que merece.

La segunda enseñanza

Al tratar de formar una idea general de la actual situación de esta enseñanza, es imposible dejar de observar que existen en la opinión ciertos prejuicios hostiles a ella, que conducen frecuentemente a juzgarla con pasión y en sentido muy desfavorable.

Mi firme propósito, al verme conducido a tratar de este asunto, es evitar caer en ese extremo y fundar mis juicios en hechos bien comprobados y en autoridades de reconocida competencia.

Es sabido que ninguna de las escuelas especiales y academias militares que exigen algunos conocimientos matemáticos para el ingreso, han aceptado nunca los estudios de la segunda enseñanza, a pesar de que los programas contienen substancialmente las mismas materias, en lo que generalmente se ha venido llamando Matemáticas elementales.

Las Facultades de Ciencias son la única excepción; en

éstas pueden continuar sus estudios los alumnos que poseen el grado de Bachiller sin sufrir nuevo examen de matemáticas. Pero también es cierto que los Catedráticos de las Facultades vienen reclamando con insistencia, desde hace muchos años, un examen de ingreso. Muy recientemente han insistido en ello los ilustres Catedráticos del primer año de la Facultad de Ciencias de la Universidad Central, don Cecilio Jiménez Rueda y don Luis Octavio de Toledo, en las Memorias que presentaron al Congreso de Cambridge.

Dice el señor Jiménez Rueda, Catedrático de Geometría métrica [1]:

« Lo que sucede actualmente es que los alumnos convierten el primer año de la Facultad de Ciencias en una preparación; las tres cuartas partes fracasan en sus exámenes, y se ven obligados a repetir el curso; así, muchos de ellos emplean dos o tres años en aprobar las primeras asignaturas, lo cual es un perjuicio para ellos y también para la enseñanza, porque en vez de tener en cada clase veinte o treinta alumnos, tenemos más de ciento ».

Don Luis Octavio de Toledo, Catedrático de Análisis matemático, da a entender que muchos de sus alumnos ignoran la práctica de las operaciones más comunes de la Aritmética, como se ve en los párrafos siguientes [2]:

« Puedo afirmar categóricamente que, en la actualidad, entran los alumnos en nuestras Universidades en un estado de preparación tan insuficiente y tan ignorantes aun de cosas que yo estudié en la escuela de primeras letras, que la enseñanza se hace muy difícil.

« Este hecho es rigurosamente exacto, y si alguien lo pone en duda, le propongo un experimento cuyos resultados le convencerán mejor que todas las afirmaciones que se pueden hacer. En la primera quincena de Octubre demos a toda la clase, o solamente a un grupo de alum-

(1) *L'enseignément des Mathématiques en Espogne*, página 42.
(2) *L'enseignement des Mathématiques en Espagne*, página 53.

nos que designe la suerte, una serie de ejercicios o de problemas sobre quebrados, números ordinarios, fracciones decimales, sistema métrico, proporciones, ecuaciones sencillas de primer grado, etc., etc., y veremos el tanto por ciento de los que hayan resuelto bien las cuestiones propuestas».

Otra opinión muy autorizada es la del eminente y malogrado Profesor don Juan J. Durán Lóriga, quien, en el Congreso de Ciencias celebrado en Zaragoza, en 1909, se expresó en estos términos [1]:

«Seamos sinceros y digamos claramente lo que está en la conciencia de todos, y es que *la casi totalidad* de nuestros Bachilleres no saben absolutamente nada de la Matemática; preguntadles (repetimos que no hablamos de *todos*, sino de una gran mayoría) cómo se encuentra el interés de un capital (sobre todo si hay elementos fraccionarios), un problema sencillo de fondos públicos, o decidles que inscriban un círculo en un triángulo, si queréis, y recordarán que *estas cosas* las dieron en clase; pero como las llevaron *presas con alfileres* a exámenes, *se les han borrado* por completo. Ahora bien; ¿se dirigen estas palabras a censurar al Profesorado español? De ningún modo. Hemos tenido ocasión de sostener estrecha amistad con muchos Catedráticos, y podido juzgar que, en general, sus conocimientos, su interés por la enseñanza, lo que pudiéramos llamar su conciencia profesional, están por completo a la altura de su sagrada misión. Descartemos, pues, en absoluto en lo que vamos a apuntar todo cuanto pueda parecer crítica al Profesorado; que quede esto bien sentado; seamos, ante todo, justos».

Aunque no tengo el honor de tratar a ningún Catedrático de Matemáticas de la segunda enseñanza, quiero aprovechar la ocasión de adherirme en todo a las últimas palabras del señor Durán Lóriga. Sé muy bien que

(1) Asociación española para el progreso de las ciencias. Congreso de Zaragoza. Tomo II, página 14.

las mejores disposiciones individuales se estrellan contra los obstáculos que oponen una oganización mal entendida, hábitos viciosos inveterados que es muy difícil desarrraigar, un estado social poco favorable para introducir mejoras y otras muchas circunstancias semejantes.

Donde observe defectos de organización, procedimientos de enseñanza poco recomendables o cualquier otra cosa semejante que crea censurable, salvando siempre el respeto debido a las personas, la señalaré con igual libertad, ya se trate de un Establecimiento de enseñanza para mí desconocido, ya de la Escuela en que me eduqué y a cuyo servicio he consagrado la mayor parte de mi vida.

Tampoco me he de dejar llevar del vano prurito de despreciar las cosas de España por haber visto otras mejores en el extranjero, lo cual, aunque está muy de moda, considero de pésimo gusto. Mi actitud, cuando censure, será la serena del Médico que, cumpliendo un deber profesional, diagnostica una enfermedad para proponer el tratamiento oportuno.

Hábitos de orden, método y limpieza en los trabajos gráficos y escritos

Pasaré ahora a examinar un punto ya iniciado al tratar de la enseñanza primaria, que es de suma importancia.

En los exámenes de ingreso en la Escuela, he tenido ocasión de observar, muchísimas veces, un descuido muy acentuado en la forma de presentar los ejercicios escritos. Desorden completo, falta de limpieza y pulcritud, cálculos mal dispuestos, omisión sistemática de simplificaciones que saltan a la vista y otros defectos semejantes, que ponen, al que tiene la desgracia de haber contraído tan malos hábitos, en la imposibilidad de ejecutar un cálculo de alguna extensión sin cometer innumerables equivocaciones, y le impiden siempre llegar a los resultados verdaderos. Esto, que es muy general, explica centenares de fracasos en nuestros exámenes de ingreso, que

no se deben atribuir a falta de inteligencia ni de aplicación en la preparación próxima, sino a deficiencias en los primeros estudios, en la enseñanza primaria y en la secundaria.

El alumno que se halle en este caso puede considerarse incapacitado para el estudio de las ramas superiores de las Matemáticas y de las aplicaciones a las profesiones técnicas, porque rara vez comprenderá su situación, y si la comprende, es muy difícil que se decida a reconstruir su enseñanza matemática empezando por las operaciones de la Aritmética, que es lo que necesita.

A las enseñanzas primaria y secundaria, y no a la de las Academias preparatorias, que para esto es tardía, corresponde inculcar a los alumnos estos hábitos de orden y limpieza en sus trabajos matemáticos, y este es el primer paso, absolutamente indispensable, para poder acometer el estudio de las ramas superiores con algún provecho.

Hace observar el doctor Young (1) la superioridad que, respecto a este punto, manifiestan los jóvenes franceses y alemanes que han estudiado la segunda enseñanza o parte de ella en sus respectivos países sobre los americanos, cuando continúan sus estudios en la América del Norte.

« Nuestros jóvenes — dice — son muy inferiores a los franceses y alemanes en esto. Cuando concurren a las Escuelas americanas estudiantes que han recibido su educación secundaria en las Escuelas francesas y alemanas, la limpieza y pulcritud de sus trabajos bastan, generalmente, para que el Profesor pueda adivinar de qué Escuelas proceden.

« El Profesor de Matemáticas, por sí solo, difícilmente puede poner remedio a este mal, pero puede contribuir en algo. *Todos* los Profesores deben insistir en exigir trabajos limpios y una escritura clara, y deben rechazar

(1) *The Teaching of Mathematics*, página 143.

sin contemplaciones los ejercicios desaliñados. El hábito de la limpieza sólo puede conseguirse insistiendo en exigirla desde los primeros años. Una vez conseguido, persiste como cualquier otro hábito ».

Yo, que hice parte de mis estudios en Francia, en dos épocas diferentes, pude establecer esta misma comparación entre las enseñanzas francesa y española. Estudié en Francia la parte más elevada de la primera enseñanza antes de emprender la segunda enseñanza en España, y después de obtenido el título de Bachiller, repasé en Francia, como preparación para ingresar en la Escuela de Caminos, las Matemáticas elementales, estudiando, además, la Trigonometría esférica, la parte complementaria del Álgebra, la Geometría analítica plana y algunas nociones de Geometría descriptiva. Por dos veces pude así observar la gran importancia que se daba en Francia a los ejercicios y a su presentación correcta, coleccionándolos en cuadernos utilísimos para los repasos, que contrastaba con el completo abandono que reinaba en España en esta parte importantísima de la enseñanza.

Cuando entré a formar parte del Profesorado de la suprimida Escuela general preparatoria de Ingenieros y Arquitectos, propuse que se exigieran ejercicios escritos en los exámenes de ingreso, y aunque todos los Profesores reconocían su conveniencia, no se pudieron implantar por dificultades de local. Al ser suprimida esta Escuela, en 1892, se adoptó este sistema en los exámenes de ingreso en la Escuela de Ingenieros de Caminos, donde constituye ya una costumbre antigua y arraigada. Se puede afirmar que sus resultados han sido beneficiosos, pues hacen inútil e imposible el estudio de memoria, que es el mayor enemigo de la enseñanza matemática; pero lo serían mucho más, si los alumnos viniesen convenientemente preparados por haber sido iniciados en estas costumbres desde la primera y segunda enseñanza, como se practica tradicionalmente en Francia y en Alemania. Ya se ha visto que el doctor Young atribuye a esto la superiori-

dad de los alumnos que han estudiado en Francia o en Alemania sobre los americanos.

Programas de matemáticas de la segunda enseñanza

Empezaré por consignar el resultado mínimo que, a mi juicio, es posible exigir a todos los alumnos de segunda enseñanza, teniendo en cuenta que estudian cuatro cursos de Matemáticas con gran número de lecciones. Claro está que hablo de conocimientos perfectamente asimilados, y adquiridos de tal modo, que sean permanentes y duraderos.

Deberían hallarse todos, al terminar el cuarto curso, en condiciones de poder emprender con provecho el estudio de las ramas superiores de las Matemáticas sin necesidad de nuevos estudios.

Para ello es necesario y suficiente:

La práctica del cálculo numérico, incluso el logarítmico, con bastante expedición y sobre todo con la seguridad de obtener resultados exactos. Expedición en el cálculo algebraico y trigonométrico elemental, incluyendo la resolución numérica de los triángulos rectilíneos.

Conocimiento de las proposiciones usuales de la Geometría elemental, con mucha práctica en la resolución de problemas métricos en que se trate de calcular longitudes de segmentos definidos por los datos, y finalmente, mucha familiaridad con las áreas y volúmenes.

Este mínimo es necesario para los que han de continuar los estudios, y, puesto que estudian cuatro años, se debe exigir también a los que aspiran a ser médicos, abogados, farmacéuticos, etc. Si se aplica el coeficiente de reducción por causa de olvido, que en el caso de abandonar totalmente estos estudios supone una rebaja muy considerable, bien pocas matemáticas les quedarán. Pero, si se insiste en que es demasiado, se impondrá la formación de dos grupos, y a los que no necesiten tantas matemáticas, se les deberá rebajar mucho el tiempo que

destinan a su estudio, porque acostumbrarse a perder el tiempo no conviene a nadie.

A fin de formarme una idea de la situación actual de estas enseñanzas, y en la imposibilidad de estudiar los programas de todos los Institutos, he examinado un buen número de ellos, correspondientes a una decena de establecimientos de esta clase, los cuales representan las diversas regiones de la nación.

En primer lugar, he observado una variedad que creo excesiva. No sostendré que deba adoptarse un programa único, como en Francia; no lo considero necesario, pero no creo tampoco que deba concederse en esto una libertad sin límites. Ninguno de los que he examinado llega a extremos reprensibles, ni en la extensión ni en la elección de materias, pero sería conveniente evitar posibles desviaciones. Para recabar una libertad absoluta, no puede invocarse el principio de la libertad de la cátedra, ni el derecho de propiedad, por haber sido obtenida la cátedra por oposición. Esto último podrá conferir el *jus utendi*, jamás el *jus abutendi*.

Si se comparan estos programas con los antiguos programas de la segunda enseñanza, que se limitaban a lo estrictamente indispensable, y con el mínimo que he indicado a grandes rasgos, encuentro algunas adiciones que se enumeran a continuación, pero debiendo entenderse que no corresponden a un solo programa, sino al conjunto de todos ellos; son las siguientes:

Determinantes, fracciones continuas, análisis indeterminado, raíz cúbica de los polinomios, congruencias, base de los logaritmos neperianos, elipse, parábola e hipérbola, y algunas otras pequeñas adiciones en las teorías de la aritmética.

De todas ellas, yo no aceptaría más que las nociones sobre el trazado de las cónicas y, si acaso, algunas muy ligeras sobre los determinantes. Esto último es bastante frecuente en los programas que he examinado, pero algunos, una minoría, dan a esta teoría un desarrollo muy

excesivo, en mi opinión, si se tiene en cuenta la edad de los alumnos que concurren a esas clases, doce o trece años, o quizá menos en algunos casos. Creo difícil que posean la preparación debida ni la fuerza de abstracción necesaria para comprender bien esa teoría, y es indudable que para muchos resultará manjar indigesto lo que estudiado más tarde, en sazón oportuna y con la debida preparación, es agradable e interesante.

Lo que considero más opuesto a las tendencias modernas es la introducción de la raíz cúbica de los polinomios, que reune ciertamente todas las condiciones para ser desterrada de los programas elementales, condiciones que ya se han enumerado.

Varios de esos programas, la mayoría, son moderados en cuanto a la extensión, y algunos siguen muy plausiblemente las modernas recomendaciones, suprimiendo algunas teorías que se suelen estudiar sólo por rutina y por respeto a la tradición, como la raíz cúbica, omitida en varios programas. Es de suponer que, consecuentes sus autores con estas ideas, no harán perder el tiempo ni molestarán a su joven auditorio con largas divisiones de polinomios y otros cálculos semejantes, que justamente condenan los pedagogos modernos.

Hay, finalmente, algún tímido ensayo de mezcla de materias, pero a esto se opone, sin duda, la organización oficial, y no es posible pretender que se le haya dado el amplio desarrollo que hemos visto en las Escuelas de Inglaterra, simultaneando, no sólo las diversas ramas de las matemáticas, sino la Física y la Mecánica.

No insistiré en estas menudencias. Aunque convencido de la conveniencia de suprimir todo lo que no sea de absoluta necesidad por ser de inmediata aplicación, las desviaciones de este principio no son, ni por su número, ni por su calidad, de bastante importancia para que considere inaceptable ninguno de los programas que he examinado, sobre todo si se tiene en cuenta que se destinan cuatro años a estos estudios, con gran número de lecciones en cada curso.

La noción de función sólo figura en alguno de los programas, en su forma analítica, sin desarrollos ulteriores y sin la representación gráfica. No ha dejado de causarme extrañeza este hecho.

Ya se ha dicho repetidas veces que la noción de función con su representación gráfica, se introdujo hace ya muchos años en los programas oficiales de la segunda enseñanza en Francia. Pero mucho antes se hacía ya uso de ella en las clases. Cerca de cuarenta años hace que estudié matemáticas en Francia, y ya me enseñaron a representar gráficamente la variación del trinomio de segundo grado, la exponencial y la logarítmica, la resolución de la ecuación de primer grado por la intersección de una recta con el eje de las x, la de un sistema de dos ecuaciones por las coordenadas del punto de intersección de dos rectas y otras analogías semejantes.

Así se condensa en un corto número de gráficos todo lo más esencial del Álgebra elemental. Y en la teoría general de ecuaciones, el uso de la representación gráfica era constante y sistemático; esto facilita extraordinariamente la asimilación de esta teoría, que, expuesta desde un punto de vista exclusivamente abstracto y con la extensión que entonces se le daba, tiene algunas partes, como la aproximación de las raíces inconmensurables por el método de Newton, poco menos que ininteligibles y muy difíciles de dominar.

Esta práctica debería introducirse en la enseñanza elemental, porque, lejos de suponer un aumento de trabajo, facilita extraordinariamente la comprensión y asimilación de muchas materias. Tengo por seguro que si se adoptara la costumbre de hacer representar gráficamente las leyes de proporcionalidad en casos numéricos concretos, sólo por rara excepción podría repetirse el caso de alumnos que ignoren las cuentas de la regla de tres, citado por el señor Durán Lóriga.

En Inglaterra se ha generalizado tanto el empleo de los gráficos en el Álgebra elemental, en estos últimos

años, que, en opinión de algunos Profesores, se ha llegado al abuso de aplicarla a teorías en donde resulta improcedente o innecesario [1].

Las costumbres tradicionales en la enseñanza elemental conducen a exponer ciertas nociones en una forma que parece muy poco conveniente.

Esto sucede, por ejemplo, al presentar por primera vez la noción de la razón de la circunferencia al diámetro y el cálculo de los logaritmos. Después de explicar la significación de π o del logaritmo, sin duda con el objeto de aclarar estas nociones, se induce a error al principiante, enseñándole métodos de cálculo *impracticables;* porque a nadie que esté en su sano juicio se le ocurrirá calcular π por el procedimiento de ir determinando perímetros de un gran número de polígonos regulares inscritos y circunscritos [2], ni formar una tabla de logaritmos interpolando medios en las dos progresiones. Se rodean así estas nociones tan importantes de un falso aparato científico que, lejos de aclarar las ideas, da por resultado obscurecerlas en la mente del principiante. Mucho mejor sirven para este objeto los experimentos que propone Perry, y que ya practican los alumnos de las Escuelas elementales de Inglaterra, y mucho más aclara el concepto de una tabla de logaritmos, el gráfico de la exponencial, que no es sino una tabla que entra por los ojos.

Un guía acompaña a dos excursionistas y, detenido al pie de una montaña, se esfuerza en mostrarles un objeto lejano y medio oculto, junto a la cumbre. De los excursionistas, el primero se propone emprender la ascensión de la montaña y repetir con alguna frecuencia la excursión; el segundo, no puede detenerse y piensa abandonar el país sin intención de volver. Esforzarse sin ver el objeto desde el pie de la montaña, es evidentemente inútil

(1) Véase *Elementary Algebra for Schools*, Hall and Kinght. Prólogo.

(2) Muchas veces, por si esto fuera poco, se añade el método de los isoperímetros, no menos inútil ni más práctico.

en ambos casos. El primero tendrá ocasión de contemplarlo de cerca y eligiendo los puntos de vista más convenientes, y el segundo, no podrá verlo bien, ni tiene en ello ningún interés.

El Profesor de Matemáticas elementales que se empeña en adelantar nociones demasiado elevadas, se parece a este guía. Ese empeño resulta inútil para el que ha de continuar los estudios matemáticos, que es el excursionista que se propone subir a la montaña, e inútil también para el que no se propone continuarlos, que es el que va a abandonar el país sin realizar la ascención.

Lo que importa es mucho ejercicio y mucha práctica en los comienzos para elevar rápidamente al principiante a las ramas superiores, que ofrecen puntos de vista de mayor horizonte y más adecuados para la especulación.

En los principios, la especulación es siempre muy laboriosa y poco a propósito para fomentar la afición en el alumno, y además de muy mezquinos resultados.

Reformas necesarias en la enseñanza elemental

Creo que de los testimonios tan autorizados que se han citado, de mis propias observaciones en los exámenes, que he dado a conocer, y aun del común sentir del público capaz de formarse una opinión sobre este asunto, se puede deducir que la generalidad de los Bachilleres no alcanza hoy el conjunto de conocimientos que he considerado indispensables, con la perfección necesaria.

Sin embargo, contando con cuatro años de estudios, debería conseguirse ese resultado, como se consigue en muchas naciones extranjeras; y es muy importante tratar de averiguar las causas de que sea tan escaso el aprovechamiento de esos alumnos.

Ni como hipótesis debe pensarse en la incompetencia de los Profesores por falta de los conocimientos necesarios. Es probable que no haya de esto ni un solo caso. El examen de los programas ya citados basta para po-

ner en evidencia los conocimientos de sus autores, pues todos emplean ese lenguaje preciso y correcto que es patrimonio exclusivo de los que conocen muy bien estas materias.

Ya se ha dicho que tampoco puede atribuirse a la excesiva extensión de los programas, al menos en los que he examinado.

No puede exigirse preparación previa a los alumnos, o ha de limitarse a las cuatro primeras reglas de la Aritmética. Realmente, la iniciación en los primeros principios debe entenderse que corresponde a las primeras clases de la segunda enseñanza. Ello es un grave obstáculo, pero hay que aceptar las cosas como son en la realidad.

En cuanto a la inteligencia de los alumnos, estoy enteramente de acuerdo con la opinión de M. Laisant. La inteligencia necesaria para adquirir los primeros elementos de las matemáticas, la parte útil que conviene a todos y es elemento indispensable de toda persona bien educada, es tan común como la disposición para aprender a leer y a escribir. Pero hay que emplear en cada caso los procedimientos de enseñanza más convenientes para el individuo.

Esto no está en contradicción, obsérvese bien, con la suposición de Perry citada anteriormente, según la cual, sólo se encuentra 1 por cada 10.000 con disposiciones para llegar a ser un buen Profesor, y no pasa de 1 por cada 10 millones la proporción de los capaces de ser matemáticos eminentes.

Hay en los Institutos una clase denominada de nociones y ejercicios de Aritmética y Geometría, y no pongo en duda que seguirán los alumnos haciendo ejercicios durante los cuatro cursos.

Pero, en la forma de hacer estos ejercicios, creo que está la clave de la explicación del escaso aprovechamiento de los alumnos.

Si no estoy engañado, la disposición de las clases continúa siendo la tradicional, con un encerado y bancos para los alumnos.

No es esta la disposición que conviene para los principiantes (lo son, desde este punto de vista, todos los alumnos de la segunda enseñanza), si se han de dedicar a los trabajos que recomiendan los pedagogos modernos, en los cuales predominan los ejercicios ejecutados individualmente por cada alumno. Para esto se necesita disponer las clases como las de dibujo, con mesas amplias donde puedan escribir, calcular y dibujar, y estos deben ser los trabajos habituales de los alumnos.

No se diga que hay ya la costumbre de hacer muchos ejercicios, porque hacerlos un alumno en la pizarra, bajo la dirección del Profesor, mientras los demás están distraídos, como sucederá generalmente, tratándose de un auditorio de niños, es cosa muy distinta de la recomendada por los pedagogos modernos y del sistema tradicional en Francia y en Alemania. Siempre se ha dicho en las escuelas de Francia que las Matemáticas se deben estudiar «la plume à la main», con la pluma en la mano, escribiendo, calculando o dibujando.

Tampoco es de utilidad el sistema de proponer problemas o ejercicios para que los alumnos los resuelvan en casa. Habrá, tal vez, alguno que los resuelva, los demás los copian; y en ningún caso se ocuparán de escribirlos ordenadamente, ponerlos en limpio y coleccionarlos en cuadernos. Este trabajo se ha de hacer en clase.

Las clases actuales, que están dispuestas para dar conferencias, deben servir sólo para explicar a los alumnos lo necesario para poder emprender sus trabajos individuales, siempre con tendencia a la investigación personal, y estas explicaciones deben limitarse a las nociones indispensables.

Esto es urgente y de la mayor importancia. De no hacerlo así, los alumnos de la segunda enseñanza continuarán invirtiendo, como hasta ahora, cuatro años, para obtener el escasísimo provecho que se ha visto.

Elección entre los sistemas de exigir el grado de Bachiller o de prescindir de el en las escuelas de estudios superiores

Ya se ha dicho que en esto ha habido mucha variedad; aunque lo más general ha sido prescindir del grado de Bachiller. En nuestra Escuela ha predominado, en estos últimos tiempos, la opinión de que conviene exigirlo, y así está establecido en la actualidad.

Las escuelas que no lo exigen, como todas las Academias militares, parten, sin duda, del supuesto de que esos estudios son deficientes, y quizá perjudiciales.

En mi opinión, conviene exigir el grado de Bachiller por varias razones.

En primer lugar, su supresión da por resultado la omisión de todo estudio de cultura literaria y filosófica, que en vano se pretenderá reemplazar con algunas clases en las Academias preparatorias, en las cuales existe la tradición de atender exclusivamente a la instrucción matemática. Considero inaceptable esta omisión de estudios tan esenciales para la cultura general, y por corto que se suponga el aprovechamiento en los Institutos de segunda enseñanza, hay que aceptar esas clases tal como son, puesto que no hay medio de reemplazarlas por otras mejores.

Si en una localidad sólo existe ladrillo de mala calidad para construir los cimientos de las casas, habrá que aceptar ese material, nunca suprimir el cimiento.

Tiene además la ventaja de impedir que los jóvenes, en el período que media entre la terminación de su instrucción primaria y el comienzo de los estudios superiores, adquieran hábitos de holganza, que es la peor preparación posible para toda clase de estudios, o que acometan prematuramente y mal preparados aquellos estudios; otro daño muy grande. Hay que desconfiar de los niños precoces en todas las disciplinas, y muy especialmente en las matemáticas. Ni aun entre las eminencias de primera magnitud abundan mucho. Se citan pocos Pascal o Mo-

zart; son mucho más frecuentes los Newton y Beethoven, que no fueron precoces.

Enseñanza en las Academias preparatorias

Me consta que en esta clase de enseñanza hay y ha habido siempre Profesores excelentes, que reunen todas las cualidades que se requieren para tan delicada profesión, y que, además, se trabaja mucho. Pero hay muchos obstáculos que impiden que el aprovechamiento sea tan grande como se podría esperar, dado estos antecedentes.

El objeto inmediato de esta enseñanza no es la instrucción del alumno, sino conseguir un buen resultado en los exámenes, y ya, en el capítulo primero, se han explicado suficientemente los inconvenientes que de ello resultan.

Además, luchan los Profesores con la necesidad imprescindible de desarrollar completamente programas cuya extensión ha sido siempre exagerada, lo cual impide que el estudio se pueda hacer lentamente y en la forma que se ha recomendado en el citado capítulo.

Y en este punto, es preciso confesar que nuestra Escuela ha ejercido una influencia muy perjudicial, cuyos resultados no se limitaron a la propia Escuela, sino que el mal ejemplo fué imitado a porfía por todas las demás.

De ello dan testimonio todos los programas de ingreso que rigieron desde 1877 hasta la creación de la Escuela general preparatoria de Ingenieros y Arquitectos, en 1886. Esta Escuela siguió la misma marcha, y sus programas de ingreso eran tan extensos, que la mayor parte de los alumnos invertían, por lo menos, tres o cuatro años en el estudio de las Matemáticas elementales con el Álgebra y la Geometría analítica. Se dió frecuentemente el caso de aspirantes que demostraban conocimientos no muy comunes en Homografía e Involución, y luego resultaba que ignoraban las áreas y los volúmenes; y yo recuerdo el de un aspirante que contestó satisfactoriamente a varias preguntas sobre las formas algebraicas, y no supo desarro-

llar la cuarta potencia de un trinomio, lo cual parece contradictorio. No insistiré sobre este punto, que he tratado recientemente en otra parte [1].

Cuando se suprimió la Escuela general preparatoria, en 1892, se inició ya la reacción, y desde entonces, en todas las reformas que se han sucedido, se han ido introduciendo supresiones. En el próximo capítulo se estudiarán los programas actuales.

Ya he dicho que en esta enseñanza hay y ha habido siempre excelentes Profesores. Alguna reserva he de hacer, sin embargo, acerca del sistema de reclutamiento de este Profesorado, que, como sistema, es bastante defectuoso. Entran a formar parte de él jóvenes Ingenieros de distintos ramos, militares, principalmente de los llamados Cuerpos facultativos, y aun alumnos de nuestras Escuelas, muchas veces afectos a otros destinos y a otros trabajos, y que no pueden dedicar todo el tiempo y toda la atención que exige una clase elemental. Nadie puede poner en duda sus conocimientos, muy sobrados para el desempeño de estas clases. Pero a falta de la experiencia, que no puede tener el principiante, se requiere una preparación pedagógica, a la que se atiende mucho en el extranjero, especialmente en Alemania, donde se ha organizado una enseñanza práctica, y también en Inglaterra, en cuyas Escuelas hay clases y cursos especiales para formar Profesores, estudios muy importantes, sobre todo si se trata de la enseñanza elemental; y de esta preparación carecen forzosamente los Profesores aludidos.

Oí decir en el Congreso de Cambridge a un Profesor inglés, que los Profesores de Matemáticas elementales deberían ser siempre viejos. Aunque el Consejo es poco práctico, y muy especialmente en la enseñanza de que tratamos habrán de predominar siempre los jóvenes, fácilmente adivinará el lector algunas de las razones en que se puede fundar esa afirmación, y no me detendré a discutirla, porque es inaplicable, lo repito.

---

(1) Véase *L'enseignement des Mathématiques en Espagne*, página 80 y siguientes.

Sin embargo, creo que los jóvenes Profesores deberían, a ser posible, hacer sus primeros ensayos en las ramas más elevadas de las matemáticas, y no en los primeros elementos. Los errores debidos a la inexperiencia, que son inevitables, tienen mucha mayor trascendencia y causan mayores perjuicios a los principiantes que a los alumnos de las clases más adelantadas, y para el mismo Profesor es más provechoso su trabajo, porque le obliga a un estudio más serio y le permite dominar más pronto todas las materias que más tarde pueda verse en el caso de enseñar, incluso las elementales. Creo que, como preparación para enseñar Álgebra elemental, es más eficaz la enseñanza del Cálculo infinitesimal que la de la misma Álgebra, y estas consideraciones deberían tenerse en cuenta cuando hay posibilidad de elegir. Pero todo esto resultará inútil cuando se llegue a plantear el sistema moderno, que consiste en que un mismo Profesor se encargue de enseñar simultáneamente las diversas ramas de las matemáticas a un grupo de alumnos, como se practica ya en las escuelas inglesas.

Lo dicho respecto a la disposición de las clases en la segunda enseñanza, y la necesidad de que los alumnos trabajen habitualmente en mesas dispuestas para escribir, calcular y dibujar, es evidentemente aplicable a la enseñanza de las Academias preparatorias.

Las escuelas de Ingenieros tienen ya establecido en sus reglamentos el ejercicio escrito en los exámenes de ingreso, y tengo entendido que también se proponen adoptar este sistema las Academias militares. Será una medida capaz, por sí sola, de elevar notablemente el nivel de los estudios matemáticos en España, si, como es de esperar, se establece la reforma con la debida preparación, y los tribunales proceden con gran prudencia para que sea aceptada por el público. Si el ensayo llegara a fracasar por causas ajenas a sus condiciones intrínsecas, que son excelentes, perdurarían en la enseñanza matemática de España los viejos procedimientos desacreditados y justamente desechados en todas partes.

Consideraciones generales sobre la enseñanza elemental

Si comparamos ahora esta enseñanza con la que ha sido recomendada en el capítulo primero, y reflexionamos acerca de su eficacia para alcanzar el fin que se debe proponer, a saber: «que cada individuo se forje por sí mismo los instrumentos necesarios para la investigación personal», habrá forzosamente que reconocer que, en la actualidad, son muy contados los españoles que, en esta fase de sus estudios matemáticos, reciben el tratamiento adecuado para desarrollar sus facultades intelectuales y para cultivar y excitar sus disposiciones para la invención.

Y no fueron más afortunadas en esto las generaciones precedentes. Ya se ha visto que, hace unos cuarenta años, la enseñanza matemática en España iba manifiestamente rezagada respecto a la de Francia, y si retrocedemos más, pronto llegaremos, sin encontrar al paso ningún hecho culminante, a aquellos tiempos en que esta enseñanza se hallaba totalmente abandonada y en que eran considerados poco menos que como astrólogos o nigromantes los pocos españoles capaces de interpretar una fórmula algebraica. La creación de nuestra Escuela con sus modestos estudios elementalès del ingreso, tomados en serio por los tribunales, dió lugar a la creación de algunas academias particulares donde se daba instrucción matemática a unas cuantas docenas de jóvenes trabajadores, y este hecho tan sencillo fué considerado como un prodigioso adelanto, como una mejora trascendental.

Los estudios matemáticos nunca han alcanzado en España una organización sólida, ni su enseñanza ha sido bien comprendida. Así se explica nuestra manifiesta esterilidad en el campo de esta ciencia, y la desproporción entre el trabajo de la juventud que se dedica a su estudio con el aprovechamiento que alcanza.

Porque no puede negarse que la juventud que aspira a nuestras escuelas especiales, academias militares é in-

numerables concursos y oposiciones, en los cuales, en mayor o menor escala, se exigen conocimientos matemáticos, derrocha un gran caudal de trabajo con muy escaso fruto. Se trabaja mucho, pero se trabaja mal.

El remedio está en la adopción de los procedimientos del Profesor Perry. El objeto que se propuso principalmente fué vulgarizar en Inglaterra los conocimientos matemáticos útiles, en vista del estado de postración en que se hallaba esta clase de enseñanza, porque la muy elevada de las Universidades, como la de Oxford y Cambridge, era patrimonio exclusivo de las clases privilegiadas. En América ocurría lo propio, y ya se ha visto que los métodos de Perry han sido acogidos con entusiasmo, y también los brillantes resultados que se han conseguido en muy pocos años en ambas naciones.

Nosotros tenemos aún mayores motivos que los ingleses y americanos para adoptar ese sistema.

Como carecemos de una tradición digna de respeto, estamos en el caso de importar lo más apropiado a nuestra situación. Sería locura pretender colocarnos de un salto al nivel de Francia y de Alemania, cuya envidiable situación es fruto de un trabajo lento y bien dirigido durante muchas generaciones.

Por otra parte, no corremos el mismo riesgo que Inglaterra y los Estados Unidos cuando adoptaron estos procedimientos, puesto que los ingleses y americanos, al precedernos, nos han enseñado el camino, y su experiencia nos garantiza los resultados.

Y finalmente, no presenta más dificultades que las que oponga el apego a la rutina, porque se trata precisamente de procedimientos populares, como que su objeto es la vulgarización.